

О величине индуцированных зарядов и электростатического диполя вытянутого проводящего сфероида, расположенного коллинеарно однородному электростатическому полю

Н. Ю. Колбнева, * С. О. Ширяева, Ю. Б. Кузьмичев

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, *e-mail: shir@uniyar.ac.ru*

Аналитическим путем в сферической системе координат переходом от сфероидальных координат в линейном приближении по квадрату эксцентриситета найдены величина и положения центров индуцированных зарядов и величина поляризаационного диполя.

Ключевые слова: сфероидальная капля, электростатическое поле, центры индуцированных зарядов, индуцированный диполь.

УДК 532.59:534.1

ВВЕДЕНИЕ

В многочисленных технических и технологических приложениях приходится иметь дело с каплями и жидкокапельным аэрозолем во внешних электростатических полях. Классический пример: туман в приземном электростатическом поле или облачные капли во внутриоблачном электростатическом поле (отметим, что характерный масштаб возможных пространственных вариаций электрического поля много больше размеров отдельных капель) [1–4]. Можно добавить и электрораспыление жидкостей различной природы, жидкометаллические источники ионов, масс-спектрометрию нелетучих жидкостей с электростатическим способом ввода испытуемой жидкости в разрядную систему, ионные коллоидные реактивные двигатели и многое другое [5–8]. При этом проблема неоднократно исследовалась и экспериментально, и теоретически [9–12]. Приходится сталкиваться с незаряженной каплей во внешнем электростатическом поле и в задачах расчета электромагнитного излучения от незаряженных облаков [13]. Причем расчет излучения от нелинейно-осциллирующих капель [14] будет связан с осцилляциями именно диполей. При теоретическом расчете характеристик каплей приходится сталкиваться с тем обстоятельством, что они в электростатическом поле поляризуются и становятся с электростатической точки зрения диполями. Аналитические выражения для потенциала электростатического поля сфероидальной капли во внешнем электростатическом поле и поверхностной плотности ее заряда давно известны в сфероидальных координатах [15–18] (см., например, [18, с. 41, 44]). Но сложность аналитического перехода от сфероидальных координат, например к сферическим

весьма затрудняет использование результата [15–18]. В этой связи представляется целесообразным выполнить необходимый переход и считать поляризаационные заряды и величины поляризаационных диполей.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу об определении величин и положений центров индуцированных зарядов и величины индуцированного диполя в сферической системе координат переходом от сфероидальных координат.

Пусть незаряженный проводник сферической формы радиуса R находится в однородном постоянном электрическом поле напряженностью E_0 . Примем, что внешней средой является вакуум с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_* = 1$.

Проводимость внутренней среды будем принимать достаточно высокой, чтобы характерное время перераспределения поляризаационного заряда по поверхности было много меньше гидродинамического времени и электрическое поле в окрестности сферы можно было считать электростатическим в любой момент времени и характеризовать потенциалом $\Phi(r, \theta)$.

Потенциал в окрестности сферы (или сфероида) удовлетворяет обычному уравнению Лапласа.

Естественные граничные условия для напряженности электростатического поля $\vec{E}(r, \theta)$ в окрестности жесткой электропроводной сферы (или сфероида) определены в виде:

$$\vec{E}(r, \theta) \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \vec{E}_0 \equiv E_0 \vec{e}_z; \quad \vec{E}(r, \theta) \Big|_{r=R} \rightarrow 0,$$

где \vec{e}_z – орт декартовой системы координат, $\vec{E}(r, \theta) = \nabla \Phi(r, \theta)$.

Проводящую жесткую сферу (или сфероид), индукционно-заряженную во внешнем электростатическом поле, можно представить как систему двух индуцированных зарядов, равных по величине, но с противоположными знаками, разнесенными на некоторое расстояние порядка радиуса сферы (диполь).

Решим сформулированную задачу, перейдя от тривиальных, уже решенных для сферы, к проблематичным, – для сфероида.

ПОЛОЖЕНИЕ ЦЕНТРОВ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ЗАРЯДОВ СФЕРЫ

Начнем с простейшей задачи: определим искомые величины для твердой электропроводной сферы.

Найдем положение центров индуцированных зарядов сферы, находящейся в однородном постоянном электрическом поле напряженностью E_0 , полагая, что поверхностная плотность заряда на сфере $\sigma(\theta)$ определяется выражением $\sigma(\theta) \equiv \frac{3E_0}{4\pi} \cos \theta$ [18, с. 30], θ – полярный угол.

Направим вектор напряженности электрического поля вдоль оси z от положительного заряда к отрицательному.

Положение центров индуцированных зарядов сферы определяется системой уравнений (1)–(3):

$$q_+ + q_- = 0; \quad (1)$$

$$\vec{R}^{(+)} = \frac{1}{q_+} \int_{S_1} \vec{r} dq_+;$$

$$S_1 \equiv \left[r = R; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right]; \quad (2)$$

$$\vec{R}^{(-)} = \frac{1}{q_-} \int_{S_2} \vec{r} dq_-;$$

$$S_2 \equiv \left[r = R; \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right], \quad (3)$$

где q_+ – положительный и q_- – отрицательный индуцированные заряды.

В выражении (2) положительный индуцированный заряд определен в виде:

$$q_+ = \int_{S_1} dq_+ = \int_{S_1} \sigma(\theta) \cdot dS_1 = \int_{S_1} \sigma(\theta) \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (4)$$

Подставив величину поверхностной плотности индуцированного заряда на полусфере в (4) и взяв интеграл по поверхности S_1 , получим выражение для положительного индуцированного заряда:

$$q_+ = \frac{3}{4} R^2 E_0. \quad (5)$$

Для нахождения положения центра заряда q_+ в (2) выпишем выражение для радиус-вектора:

$$\vec{r} = r(\vec{e}_x \sin \theta \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \theta \sin \varphi + \vec{e}_z \cos \theta); \quad (6)$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – орты декартовой системы координат, не зависящие от положения точки пространства, в которой они определяются.

Приняв во внимание, что $R_x^{(+)} = R_y^{(+)}$, и подставив выражения индуцированного заряда (5) и радиус-вектора (6) в условие (2), получим выражение положения центра заряда вдоль оси z :

$$R_z^{(+)} = \frac{2}{3} R.$$

Аналогичным образом для второй половинки сферы, определяемой поверхностью S_2 в выражении (3), получим решения для величины отрицательного индуцированного заряда:

$$q_- = -\frac{3}{4} R^2 E_0$$

и положения его центра:

$$R_z^{(-)} = -\frac{2}{3} R.$$

(см. рис. 1).

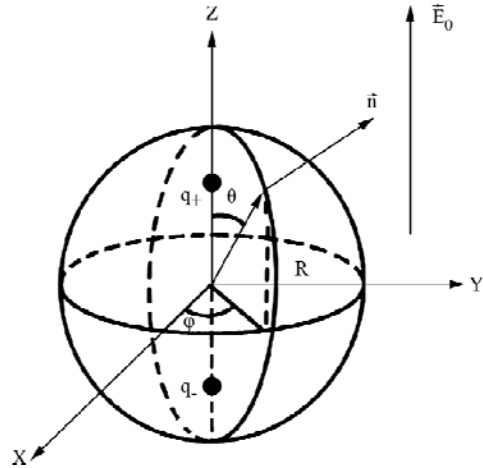


Рис. 1. Схема расположения поляризационных зарядов в сфере.

В итоге индуцированный диполь для незаряженной сферы во внешнем электростатическом поле определим выражением [19]:

$$\vec{p} = R^3 E_0 \cdot \vec{e}_z. \quad (7)$$

ПЕРЕХОД ОТ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА, ПОЛУЧЕННОГО В СФЕРОИДАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ, В СФЕРИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ КООРДИНАТ

Для нахождения характеристик электростатического поля проводящего сфероида, помещенного во внешнее однородное электростатическое поле, найдем выражение электростатического

потенциала сфероида в удобной для практического использования сферической системе координат, осуществив переход от известного решения, полученного в сфероидальных координатах (ξ, ζ, φ) .

Выражение для потенциала электростатического поля вокруг вытянутого сфероида в сфероидальных координатах имеет вид [18, с. 41]:

$$\Phi = -E_0 z \left\{ 1 - \left(\operatorname{Arth} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + \xi}} - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + \xi}} \right) \left(\operatorname{Arth} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right)^{-1} \right\}, \quad (8)$$

где сфероидальная координата ξ определяется как корень уравнения

$$\frac{z^2}{a^2 + \xi} + \frac{\rho^2}{b^2 + \xi} = 1, \quad (9)$$

где z и ρ – цилиндрические координаты.

Решения уравнения (9) примут вид:

$$\xi_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ -(a^2 + b^2) + z^2 + \rho^2 \pm \sqrt{(-(a^2 + b^2) + z^2 + \rho^2)^2 + 4(b^2 z^2 + a^2(\rho^2 - b^2))} \right\}. \quad (10)$$

Значения ξ_1 и ξ_2 отличаются лишь знаком перед радикалом в (10). Несложно видеть, что

$$-(a^2 + b^2) + z^2 + \rho^2 < \sqrt{(-(a^2 + b^2) + z^2 + \rho^2)^2 + 4(b^2 z^2 + a^2(\rho^2 - b^2))}.$$

Ясно, что один корень уравнения (9) отрицателен, другой – положителен. В области вне сфероида координата ξ изменяется в диапазоне $0 \leq \xi < \infty$. Поэтому следует взять

$$\xi = \frac{1}{2} \left\{ -(a^2 + b^2) + z^2 + \rho^2 + \sqrt{(-(a^2 + b^2) + z^2 + \rho^2)^2 + 4(b^2 z^2 + a^2(\rho^2 - b^2))} \right\}.$$

Связь координат z, ρ , с координатами ξ, ζ выражается формулами:

$$z^2 = \frac{(\xi + a^2)(\zeta + a^2)}{a^2 - b^2}; \quad \rho^2 = \frac{(\xi + b^2)(\zeta + b^2)}{b^2 - a^2}.$$

Чтобы получить выражение для электрического потенциала незаряженного эллипсоида во внешнем электростатическом поле в сферической системе координат (r, θ, φ) , координаты z, ρ представим в виде:

$$z = r \cos \theta; \quad \rho = r \sin \theta. \quad (11)$$

Полуоси эллипсоида a, b выражаются через эксцентриситет в виде соотношений:

$$a = R(1 - e^2)^{-1/3}; \quad b = R(1 - e^2)^{1/6}, \quad (12)$$

где $e \equiv \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ – эксцентриситет сфероида.

Подставив в (8) полученное выражение для ξ , соотношения (11) – для z и ρ , (12) – для полуосей a и b , получим выражение электрического потенциала сфероида в сферических координатах в линейном по квадрату эксцентриситета приближении:

$$\Phi(r, \theta) = E_0 r P_1(\mu) \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right) + \frac{2e^2 R^3}{5 r^2} E_0 \left(P_1(\mu) + \frac{3R^2}{2r^2} P_3(\mu) \right), \quad (13)$$

где $P_3(\mu)$ – осесимметричные полиномы Лежандра [20]; $\mu \equiv \cos \theta$.

Такое же выражение получается, если найти распределение электрического поля в окрестности вытянутого сфероида непосредственно в сферических координатах.

РАСЧЕТ ПОТЕНЦИАЛА ВЫТЯНУТОГО СФЕРОИДА НЕПОСРЕДСТВЕННО В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Краевая задача для нахождения электростатического потенциала $\Phi(r, \theta)$ в сферических координатах имеет вид:

$$\Delta \Phi(r, \theta) = 0;$$

$$\Phi(r, \theta) \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -E_0 r \mu; \quad \Phi(r, \theta) \Big|_{r=r(\theta)} = \text{const};$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n}, \nabla \Phi) dS = 0;$$

$$S \equiv [r = r(\theta); 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi],$$

где $r = r(\theta)$ – уравнение вытянутого сфероида.

Представим искомый потенциал электростатического поля в окрестности сфероидальной поверхности в линейном по квадрату эксцентриситета приближении:

$$\Phi(r, \theta) \approx \Phi^{(0)}(r, \theta) + \Phi^{(1)}(r, \theta) + O(e^4),$$

где $\Phi^{(0)}(r, \theta)$ – электрический потенциал нулевого порядка малости по e^2 и $\Phi^{(1)}(r, \theta)$ – электрический потенциал первого порядка по e^2 .

Решив последовательно соответствующие краевые задачи различных порядков малости (см.

приложение), получим решение, совпадающее с (13).

РАСЧЕТ ПОВЕРХНОСТНОЙ ПЛОТНОСТИ ИНДУЦИРОВАННОГО В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ ЗАРЯДА НА ВЫТЯНУТОМ СФЕРОИДЕ НЕПОСРЕДСТВЕННО В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Учтем, что величина поверхностной плотности индуцированного заряда на сфероиде $r(\theta)$ определяется формулой [21]:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} (\vec{n}, \vec{E}) \Big|_{r=r(\theta)}, \quad (14)$$

где \vec{E} – напряженность электрического поля в его окрестности. Орт нормали к поверхности сфероида \vec{n} определяется выражением:

$$\vec{n} = \frac{\nabla(r-r(\theta))}{|\nabla(r-r(\theta))|} \Big|_{r=r(\theta)}.$$

В нашем случае

$$\vec{n} = \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta.$$

Учитывая, что $\vec{E} = -\nabla\Phi$, и подставив в (14) выражение для нормали, получим поверхностную плотность индуцированного заряда на вытянутом сфероиде в линейном по e^2 приближении. Она будет определена выражением:

$$\sigma \equiv \frac{3E_0}{4\pi} \mu \left(1 - e^2 \left(\frac{3}{5} - \mu^2 \right) \right).$$

Такое же выражение мы найдем, используя формулу для поверхностной плотности индуцированного заряда, полученную в [15–18] в сфероидальных координатах, совершая переход к сферическим.

ПЕРЕХОД ОТ ВЫРАЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ПЛОТНОСТИ ЗАРЯДА, ПОЛУЧЕННОГО В СФЕРОИДАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ, В СФЕРИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ КООРДИНАТ

Распределение индуцированных зарядов по поверхности незаряженного проводящего эллипсоида во внешнем однородном поле определено формулой [18, с. 44]:

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\xi=0} = -\frac{1}{4\pi h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = E_0 \frac{v_z}{4\pi n^{(z)}}, \quad (15)$$

где

$$v_z = \frac{z}{2a^2 h_1} \Big|_{\xi=0}. \quad (16)$$

Для вытянутого сфероида имеем:

$$n^{(z)} = \frac{b^2}{a^2} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right)^{-3/2} \left(\text{Arth} \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right). \quad (17)$$

Элемент длины вдоль направления нормали в эллипсоидальных координатах задан в виде:

$$h_1 \Big|_{\xi=0} = \frac{\sqrt{\xi \eta}}{2ab^2}. \quad (18)$$

Подставив (16)–(18) в (15), получим выражение для поверхностной плотности заряда в вытянутых сфероидальных координатах ($a > b = c$):

$$\sigma = E_0 z \frac{a}{4\pi \sqrt{\eta \zeta}} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right)^{3/2} \left(\text{Arth} \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right)^{-1}. \quad (19)$$

Сфероидальная координата η при $c \rightarrow b$ вырождается в

$$\eta = -b^2. \quad (20)$$

Сфероидальная координата ζ выражается формулой:

$$\zeta = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\rho^2 + \left(z + \sqrt{a^2 - b^2} \right)^2} - \sqrt{\rho^2 + \left(z - \sqrt{a^2 - b^2} \right)^2} \right)^2 - a^2. \quad (21)$$

Чтобы перейти от выражения (19) для поверхностной плотности индуцированного заряда, записанного в сфероидальной системе координат, к выражению в сферических координатах, подставим в (19) сфероидальные координаты ζ , η в виде (20)–(21), выражение (11) для z , ρ , в сферических координатах и соотношение (12) для полуосей a , b .

В итоге имеем выражение в линейном по квадрату эксцентриситета приближении:

$$\sigma \equiv \frac{3E_0}{4\pi} \frac{r}{R} \mu \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \left(\frac{13}{15} - \mu^2 \right) \right). \quad (22)$$

Подставив уравнение поверхности сфероида $r(\theta) \approx R \left(1 + \frac{1}{3} e^2 P_2(\mu) \right)$ в (22), получим выражение поверхностной плотности заряда в сферических координатах в линейном по e^2 приближении:

$$\sigma \equiv \frac{3E_0}{4\pi} \mu \left(1 - e^2 \left(\frac{3}{5} - \mu^2 \right) \right).$$

ПОЛОЖЕНИЕ ЦЕНТРОВ ИНДУЦИРОВАННЫХ ЗАРЯДОВ СФЕРОИДА

Определим положение центров индуцированных зарядов сфероида с поверхностной плотностью заряда σ , находящегося в однородном электростатическом поле напряженностью E_0 .

Направим вектор напряженности электрического поля вдоль оси z .

Положение центров индуцированных зарядов сфероида определится выражениями:

$$\vec{R}^{(+)} = \frac{1}{q_+} \int_{S_3} \vec{r} dq_+;$$

$$S_3 \equiv \left[r = r(\theta); 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right]; \quad (23)$$

$$\vec{R}^{(-)} = \frac{1}{q_-} \int_{S_4} \vec{r} dq_-;$$

$$S_4 \equiv \left[r = r(\theta); \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right], \quad (24)$$

где уравнение поверхности вытянутого сфероида $r(\theta)$ в сферических координатах с началом в его центре в линейном по квадрату эксцентриситета e^2 приближении имеет вид:

$$r(\theta) \approx R \left(1 + \frac{1}{3} e^2 P_2(\mu) \right) \approx R + h(\theta). \quad (25)$$

В выражении (23) положительный индуцированный заряд определен в виде

$$q_+ = \int_{S_3} dq_+ = \int_{S_3} \sigma dS_3 = \int \sigma r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (26)$$

Величина поверхностной плотности индуцированного заряда на сфероиде $r(\theta)$ в выражении (26) определяется формулой (14).

Взяв интеграл (26), получим величину положительного индуцированного заряда:

$$q_+ = \frac{3}{4} R^2 E_0 \left(1 + \frac{1}{15} e^2 \right).$$

Его положение определяется (23):

$$R_z^{(+)} = \frac{2}{3} R \left(1 + \frac{1}{3} e^2 \right).$$

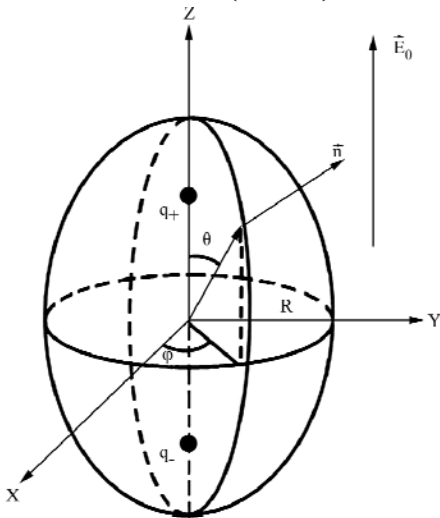


Рис. 2. Схема расположения поляризационных зарядов в сфероиде.

Аналогичным образом для второй половинки сфероида, определяемой поверхностью S_4 в выражении (24), получим решения для величины отрицательного индуцированного заряда:

$$q_- = -\frac{3}{4} R^2 E_0 \left(1 + \frac{1}{15} e^2 \right)$$

и положения его центра на оси z :

$$R_z^{(-)} = -\frac{2}{3} R \left(1 + \frac{1}{3} e^2 \right)$$

(см. рис. 2).

Величина образующегося диполя при этом будет:

$$\vec{p} = q_+ \cdot 2R_z^{(+)} \cdot \vec{e}_z$$

или

$$\vec{p} \approx R^3 E_0 \left(1 + \frac{2}{5} e^2 \right) \cdot \vec{e}_z.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе найдены величины индуцированных зарядов на сфере, во внешнем однородном электростатическом поле, а также величина эквивалентного диполя для сферы. Переходом (в известном аналитическом выражении для потенциала в сфероидальных координатах) от сфероидальных координат к сферическим получено аналитическое выражение для электростатического потенциала вытянутого сфероида (во внешнем однородном электростатическом поле) в линейном приближении по квадрату эксцентриситета. Оно же получено прямым решением краевой электростатической задачи в сферической системе координат. Найдена величина эквивалентного диполя для сфероида.

ПРИЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Электрический потенциал в нулевом по квадрату эксцентриситета приближении. Решим систему уравнений:

$$\Delta \Phi_0(r, \theta) = 0; \quad (1\Pi)$$

граничные условия:

$$\Phi_0(r, \theta) \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -E_0 r \cos \theta;$$

$$\Phi_0(r, \theta) \Big|_{r=R} = \text{const}; \quad (2\Pi)$$

условие незаряженности сферы

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n}, \nabla \Phi_0) dS = 0;$$

$$S \equiv [r = R; 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi] \quad (3\Pi)$$

и условие эквипотенциальности:

$$(\vec{\tau}, \nabla \Phi_0) \Big|_{r=R} = 0. \quad (4\Pi)$$

В виде рядов по полиномам $P_n(\mu)$ найдем решение уравнения (1П) для электрического потенциала $\Phi_0(r, \theta)$, удовлетворяющего граничным условиям:

$$\Phi_0(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\mu). \quad (5\Pi)$$

Из условия (2П) поведения электрического потенциала $\Phi_0(r, \theta)$ на бесконечности получим решение:

$$A_1 = -E_0. \quad (6\Pi)$$

Подставив соотношение (6П) в решение уравнения Лапласа (5), запишем выражение для электрического потенциала в виде:

$$\Phi_0(r, \theta) = -E_0 r P_1(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\mu). \quad (7\Pi)$$

Подставив выражение (7П) для потенциала в условие эквипотенциальности (4), выразим константу B_n в виде:

$$B_1 = E_0 R^3. \quad (8\Pi)$$

Подставив выражения для констант (6П), (7П) в разложение (5П) при выполнении условия незаряженности сферы (3П), получим решение электрического потенциала в нулевом по квадрату эксцентриситета приближении:

$$\Phi_0(r, \theta) = E_0 r P_1(\mu) \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right). \quad (9\Pi)$$

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ В ЛИНЕЙНОМ ПО КВАДРАТУ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТА ПРИБЛИЖЕНИИ

Математическая формулировка задачи для электрического потенциала в линейном приближении по e^2 имеет вид:

$$\Delta \Phi_1(r, \theta) = 0; \quad (10\Pi)$$

$$\Phi_1(r, \theta) \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0;$$

$$\Phi_1(r, \theta) \Big|_{r=r(\theta)} = \text{const}; \quad (11\Pi)$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n}, \nabla \Phi_1) dS = 0;$$

$$S = [r = r(\theta); 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi]; \quad (12\Pi)$$

$$(\vec{\tau}, \nabla \Phi_1) \Big|_{r=r(\theta)} = 0.$$

Решение уравнения Лапласа (10П), удовлетворяющее граничным условиям (11П) в электростатической задаче в сферических координа-

тах для осесимметричного случая, записывается в виде:

$$\Phi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\mu). \quad (13\Pi)$$

Подставим разложение (13П) в условие эквипотенциальности:

$$\Phi_1(r, \theta) \Big|_{r=R} + \frac{\partial \Phi_0(r, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=R} h(\theta) = 0,$$

откуда выразим константы B_n в виде:

$$B_1 = \frac{2}{5} E_0 R^3 e^2; \quad B_3 = \frac{3}{5} E_0 R^5 e^2.$$

Подставив значения B_1, B_3 в уравнение (13П) при выполнении условия незаряженности сфероида (12П), получим решение электрического потенциала в линейном по квадрату эксцентриситета приближении:

$$\Phi_1(r, \theta) = \frac{2e^2 R^3}{5 r^2} E_0 \left(P_1(\mu) + \frac{3 R^2}{2 r^2} P_3(\mu) \right). \quad (14\Pi)$$

Складывая (9П) и (14П), получим (13).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-00170-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амелин А.Г. *Теоретические основы образования тумана при конденсации пара*. М.: Химия, 1966. 294 с.
2. Грин Х., Лейн В. *Аэрозоли – пыли, дымы и туманы*. Л.: Химия, 1969. 428 с.
3. Качурин Л.Г. *Физические основы воздействия на атмосферные процессы*. Л.: Гидрометеоздат, 1990. 464 с.
4. Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М. *Облака и облачная атмосфера*. Справочник. Л.: Гидрометеоздат, 1989. 647 с.
5. Габович М.Д. *УФН*. 1983, **140**(1), 137–151.
6. Bailey A.G. *Atomization and Spray Technology*. 1986, **2**, 95–134.
7. Fenn J.B., Mann M., Meng C.K., et al. *Science*. 1989, **246**(4926), 64–71.
8. Feng Z.C., Beard K.V. *J Fluid Mech*. 1991, **227**, 429–447.
9. Wilson C.T., Taylor G.I. *Proc Cambridge Phil. Soc*. 1925, **22**, 728–730.
10. Григорьев А.И., Синкевич О.А. *Известия АН СССР. МЖГ*. 1985, (6), 10–15.
11. Cheng K.J. *Phys Lett*. 1985, **A112**(110), 392–396.
12. Ширяева С.О., Волкова М.В., Григорьев А.И. *ЖТФ*. 2005, **75**(3), 34–42.
13. Ширяева С.О., Колбнева Н.Ю., Григорьев А.И., Артемова Т.К. *ЖТФ*. 2015, **85**(4), 20–27.
14. Ширяева С.О. *ЖТФ*. 2002, **72**(4), 15–19.

15. Стреттон Дж. А. *Теория электромагнетизма*. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948. 540 с.
16. Смайт В. *Электростатика и электродинамика*. М.: Иностранная литература, 1954. 604 с.
17. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. *Сборник задач по электродинамике*. М.: Наука, 1970. 503 с.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред*. М.: Наука, 1957. 532 с.
19. Ширяева С.О. ЖТФ. 2000, **70**(6), 20–26.
20. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. *Квантовая теория углового момента*. Л.: Наука, 1975. 436 с.
21. Тамм И.Е. *Основы теории электричества*. М.: Наука, 1989. 504 с.

Поступила 30.09.15

После доработки 04.01.16

Summary

By analytical way, in a spherical system of coordinates, transition from spheroidal coordinates in a linear approach on a square of eccentricity sizes and provisions of the centers of the induced charges and dipole size were found.

Keywords: spheroidal drop, electrostatic field, centers of induced charges, induced dipole.