

# О нелинейной деформационной поправке к частотам осцилляций сильно заряженной капли в электростатическом подвесе

\*А. И. Григорьев, Н. А. Петрушов, С. О. Ширяева

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, \*e-mail: [grig@uniyar.ac.ru](mailto:grig@uniyar.ac.ru)*

В нелинейных асимптотических расчетах четвертого порядка по величине эксцентриситета (которым измерятся стационарная деформация заряженной капли во внешнем электростатическом поле) и первом порядке по безразмерной амплитуде ее осцилляций рассчитана частота сильно заряженной капли в слабом внешнем однородном электростатическом поле. Найдены деформационные поправки к частоте, связанные с изменением равновесной формы капли по сравнению со сферической. Поскольку площадь поверхности капли во внешнем поле увеличивается, то частота осцилляций капли уменьшается и деформационная поправка имеет один знак (отрицательный). При стремлении заряда капли к критическому (к предельному в смысле устойчивости по отношению к суперпозиции собственного и индуцированного зарядов) величина поправки по порядку величины становится сравнимой с самой частотой.

*Ключевые слова:* капля, заряд, электростатическое поле, частота, деформационная нелинейная поправка.

УДК 532.59:534.1

## ВВЕДЕНИЕ

Подвесы различных типов с полным или частичным использованием компенсации веса капли противоположно ему направленной электростатической силой взаимодействия между собственным зарядом капли и внешним электростатическим полем широко используются в физике. Электростатический подвес применялся в опытах Милликена для определения заряда электрона [1], в экспериментах по проверке справедливости и закономерностей реализации критерия Рэлея неустойчивости сильно заряженной капли [2–9], в опытах по созданию высокочистых веществ и бесконтактному определению физико-химических свойств жидкостей [10], а также при исследовании искрового пробоя, воспламенения [11] мелких частиц (порошков). Во всех видах подвесов подвешенная капля находится в силовых полях, деформирующих каплю. Вопрос заключается в том, насколько бесконтактное подвешивание искажает частоту осцилляций капли?

Иначе говоря, суть обсуждающейся в данной работе проблемы сводится к тому, что деформированные во внешних полях (гравитационных, электрических, аэродинамических) заряженные капли имеют форму, отличную от сферической. В силу того, что весь математический анализ проводится в сферической системе координат (формально говоря, в силу особенностей техники счета), теоретическое рассмотрение усложняется необходимостью разложения искомым величин в

окрестности сферы, по степеням отклонения от нее реальной формы капли. В итоге искомые величины (в частности, частота) получаются в виде таковых для заряженной сферической капли плюс малые поправки, обусловленные деформацией. Следует отметить, что в подобных расчетах появляются два малых параметра: безразмерная амплитуда осцилляций и безразмерное отклонение от сферы (см., например, [12–15]). С технической стороны математической процедуры поправки к частотам возникают в асимптотических расчетах третьего порядка малости [16]. Но когда в наличии имеются два малых параметра, то появляются варианты: различные комбинации произведения степеней малых параметров, обеспечивающих третий порядок малости. Если обозначить за  $\varepsilon$  отношение амплитуды осцилляций капли к исходному ее радиусу, а за  $\beta^2$  – отношение максимальной деформации (в случае неоднородной по углам деформации) к радиусу, которые в известных пределах могут считаться малыми одного порядка, то можно предложить несколько вариантов получения третьей степени малого параметра. Например:  $\varepsilon^3$ ,  $\varepsilon^2 \cdot \beta^2$ ,  $\varepsilon \cdot \beta^4$ . Некоторые из предложенных вариантов уже рассматривались: в частности, в [17] рассмотрены первые два варианта из списка. В настоящей работе предлагается к исследованию поправка к частоте, квадратичная по величине деформации:  $\beta^4$ . А priori ясно, что она получается в расчетах первого порядка по  $\varepsilon$ , но пока не изучена в контексте сказанного.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим каплю идеальной несжимаемой проводящей жидкости, несущую заряд  $Q$  и подвешенную в электростатическом подвесе, когда коллинеарные внешнее однородное электростатическое поле напряженностью  $\vec{E}_0$  и гравитационное поле  $\vec{g}$  удерживают ее в висячем положении. Предположим, что жидкость имеет плотность  $\rho$  и коэффициент межфазного натяжения  $\sigma$ . В отсутствие электростатического и гравитационного полей капля имеет сферическую форму с радиусом  $R$ . Примем плотность жидкости  $\rho$ , коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  и радиус сферической (в отсутствие электростатического и гравитационного полей) формы капли  $R$  в качестве трех основных масштабов измерения физических величин. Перейдем к безразмерным переменным, в которых  $\rho = \sigma = R = 1$ . За всеми физическими величинами сохраним прежние обозначения.

Очевидно, что в коллинеарных полях  $\vec{E}_0$  и  $\vec{g}$  равновесная поверхность будет обладать осевой симметрией, ось симметрии направим вертикально вверх, параллельно  $\vec{E}_0$ , и будем искать форму равновесной поверхности капли в сферических координатах в наиболее общей осесимметричной форме в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$r(\theta) = 1 + h(\theta) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n P_n(\mu); \quad \mu \equiv \cos\theta;$$

$\eta_n$  – коэффициенты.

Рассматривая малые виртуальные отклонения формы капли от сферической  $h(\theta) \ll 1$  (расчеты [18] показывают, что искажение формы капли в вышеуказанных условиях действительно мало), введем малый параметр  $\beta^2 \sim h(\theta) \ll 1$ . Поскольку заряд не нарушает сферичности капли, то примем, что  $Q \sim \beta^0$ . Гравитационное и электростатическое поля должны обеспечивать неподвижность центра масс вне зависимости формы ее поверхности, поэтому  $g \sim QE_0$ . К искажению равновесной формы капли приводит компонента давления электростатического поля, зависящая от угла  $\theta$ , отсюда следует, что  $E_0^2 \sim \beta^2$ , или  $E_0 \sim \beta$ . В итоге  $E_0 \sim \beta \ll 1$ . На основании сказанного выше для неподвижности центра масс получим  $g \sim QE_0 \sim \varepsilon^{1/2} \sim \beta$ . Взаимодействие гравитационного поля, заряда и электростатического поля с отклонением формы капли  $h(\theta)$  будет приводить к появлению в соответствующих давлениях добавок, имеющих величину не ниже второго по  $\beta$ .

Согласно [18] форма равновесной капли с точностью до четвертого порядка по  $\beta$  в слабом электростатическом поле будет описываться следующим выражением:

$$r(\theta) = 1 + a_0^{(4)} P_0(\mu) + (a_2^{(2)} + a_2^{(4)}) P_2(\mu) + a_3^{(3)} P_3(\mu) + a_4^{(4)} P_4(\mu). \quad (1)$$

Верхние индексы, стоящие в скобках, обозначают порядок малости.

Коэффициенты  $a_n^{(m)}$ , выраженные через параметры Тейлора  $w \equiv E_0^2 / 16\pi$  и Рэлея  $W \equiv Q^2 / 16\pi$ , с учетом условия неподвижности центра масс капли  $g = 12\sqrt{Ww}$  [12, 14], определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} a_2^{(2)} &= \frac{3w}{1-W}; & a_3^{(3)} &= \frac{108\sqrt{Ww^3}}{5(1-W)(5-4W)}; \\ a_0^{(4)} &= -\frac{9w^2}{5(1-W)^2}; \\ a_2^{(4)} &= \frac{9w^2(79-84W+8W^2)}{7(1-W)^3(5-4W)}; \\ a_4^{(4)} &= \frac{54w^2(65-33W-28W^2)}{35(1-W)^2(3-2W)(5-4W)}. \end{aligned}$$

В размерной записи  $W \equiv Q^2 / 16\pi\sigma R^3$  и  $w \equiv E_0^2 R / 16\pi\sigma$ . Заряженная капля в отсутствие внешнего поля становится неустойчивой при  $W \geq 1$  [19]; незаряженная капля претерпевает неустойчивость во внешнем электростатическом поле при  $w \approx 2,92$  [20]. Из анализа формы равновесной капли следует, что малая стационарная деформация, обусловленная наличием внешних гравитационного и электростатического полей, пропорциональна квадрату эксцентриситета сфероидальной капли.

Как показано в [18], форму поверхности заряженной капли, находящейся во внешних гравитационном и слабом электростатическом полях, независимо от величины собственного заряда (но докритического, по Рэлею [19]) можно считать сфероидальной, описываемой выражением (1).

## РАСЧЕТ ОСЦИЛЛЯЦИЙ КАПЛИ

Проведем расчет осцилляций сильно заряженной капли в слабом внешнем электростатическом поле, коллинеарном гравитационному полю, свободная поверхность которой описывается выражением (1). Пусть  $\xi(\theta, t)$  – возмущение равновесной поверхности капли, происходящее из-за ее капиллярных осцилляций ( $\max|\xi| \equiv \varepsilon$ ).

Математическая постановка задачи состоит из уравнения Эйлера, уравнения неразрывности и уравнения Максвелла:

$$\partial_t \vec{u}(\vec{r}, t) + (\vec{u}(\vec{r}, t), \nabla) \vec{u}(\vec{r}, t) = -\nabla p_{in}(\vec{r}, t) + \vec{g};$$

$$\operatorname{div} \vec{u}(\vec{r}, t) = 0; \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0;$$

где  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  и  $p_{in}(\vec{r}, t)$  – поле скоростей и давления в капле,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  – напряженность электростатического поля в окрестности капли. Граничные условия имеют вид:

$$r \rightarrow \infty: \vec{E}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{E}_0;$$

$$r \rightarrow 0: \vec{u}(\vec{r}, t) \rightarrow 0;$$

$$r = 1 + h(\theta) + \xi(\theta, t): \frac{dF}{dt} = 0;$$

$$F \equiv r - 1 - h(\theta) - \xi(\theta, t);$$

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_s;$$

$$p_E(\vec{r}, t) + p_{in}(\vec{r}, t) - p_0 - p_\sigma(\vec{r}, t) = 0;$$

$$p_E = \frac{E_0^2}{8\pi}; \quad p_\sigma = \operatorname{div} \vec{n}; \quad \vec{n} \equiv \frac{\nabla F}{|\nabla F|};$$

$$h(\theta) \equiv a_0^{(4)} P_0(\mu) + \left( a_2^{(2)} + a_2^{(4)} \right) P_2(\mu) +$$

$$+ a_3^{(3)} P_3(\mu) + a_4^{(4)} P_4(\mu).$$

Дополним задачу условиями сохранения объема и заряда, а также неподвижности центра масс:

$$\iiint_V dV = \frac{4}{3}\pi;$$

$$V \equiv \{0 \leq r \leq 1 + h(\theta) + \xi(\theta, t); 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\};$$

$$\iint_S (\vec{n}, \vec{E}) dS = 4\pi Q;$$

$$S \equiv \{r = 1 + h(\theta) + \xi(\theta, t); 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\};$$

$$\iiint_V \vec{r} dV = 0.$$

Здесь  $\Phi(\vec{r}, t)$  – электростатический потенциал;  $\Phi_s$  – постоянный потенциал поверхности капли.

Используя модель потенциального течения жидкости, перейдем от скорости к гидродинамическому потенциалу  $\psi(\vec{r}, t)$  и от напряженности к потенциалу электростатического поля:

$$\vec{u}(r, \theta, t) = \nabla \psi(r, \theta, t); \quad \vec{E}(r, \theta, t) = -\nabla \Phi(r, \theta, t).$$

Задачу будем решать асимптотическим методом разложения по двум малым параметрам задачи  $\beta$  и  $\varepsilon$ . Так как равновесная форма вычислена с точностью до четвертого порядка малости по

малому параметру  $\beta \sim E_0$ , то форму возмущений равновесной поверхности, а также поправки к гидродинамическому и электростатическому потенциалам будем искать, сохраняя слагаемые  $\sim \varepsilon \cdot \beta^4$ . Так как движение внутри капли обусловлено наличием возмущения  $\xi(\theta, t)$  ее поверхности, то  $\psi \sim \varepsilon$ :

$$\xi(r, \theta, t) = \varepsilon \xi_1(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\psi(r, \theta, t) = \varepsilon \psi_1(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2).$$

Электростатический потенциал представим в виде разложения:

$$\Phi(r, \theta, t) = \Phi_0(r, \theta) + \varepsilon \Phi_1(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2);$$

где  $\Phi_0(r, \theta)$  – электростатический потенциал в окрестности равновесной капли формы (1),  $\Phi_1(r, \theta, t)$  – поправка к электростатическому потенциалу капли, возникающая в результате возмущения поверхности капиллярным волновым движением. Подставив разложение электростатического потенциала в задачу, разобьем ее на нулевой и первый порядки малости [21].

Задача нулевого по  $\varepsilon$  порядка малости описывает невозмущенную (равновесную) поверхность и является задачей на расчет электростатического поля в окрестности капли, поверхность которой описывается выражением (1):

$$\Delta \Phi_0(r, \theta) = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: -\nabla \Phi_0(r, \theta) \rightarrow E_0 \vec{e}_z;$$

$$r \rightarrow 1 + h(\theta): \Phi(r, \theta, t) = \Phi_s;$$

$$\iint_S (\vec{n}, \nabla \Phi_0) dS = -4\pi Q;$$

$$S \equiv \{r = 1 + h(\theta); 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Потенциал электрического поля в окрестности капли с точностью до слагаемых  $\sim \beta^4$  будет иметь вид:

$$\Phi_0(r, \theta) = \frac{4\sqrt{\pi W}}{r} + 4\sqrt{\pi w} \left( \frac{1}{r^2} - r \right) P_1(\mu) +$$

$$+ \frac{12w\sqrt{\pi W}}{r^3(1-W)} P_2(\mu) +$$

$$+ \frac{36\sqrt{\pi w^3} (2r^2(5-4W)P_1(\mu) + 15P_3(\mu))}{5r^4(1-W)(5-4W)} +$$

$$+ \frac{36w^2\sqrt{\pi W}}{5r(1-W)^2} + \frac{108w^2\sqrt{\pi W} (201-272W+76W^2)}{35r^3(1-W)^3(5-4W)} P_2(\mu) +$$

$$+\frac{216w^2\sqrt{\pi W}(227-285W+68W^2)}{835r^5(1-W)^2(3-2W)(5-4W)}P_4(\mu).$$

Выпишем линеаризованную по  $\varepsilon$  задачу первого порядка малости:

$$\Delta\Phi_1(r, \theta, t) = 0; \quad \Delta\Psi(r, \theta, t) = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \Phi_1(r, \theta, t) \rightarrow 0;$$

$$r \rightarrow 0: \Psi(r, \theta, t) \rightarrow 0;$$

а также граничные условия на свободной поверхности капли:

кинематическое:

$$r = 1 + h(\theta);$$

$$-\partial_t \xi(\theta, t) - \frac{\partial_\theta h(\theta) \partial_\theta \Psi(r, \theta, t)}{r^2} + \partial_r \Psi(r, \theta, t) = 0. \quad (2)$$

условие эквипотенциальности:

$$\Phi_1(r, \theta, t) + \xi(\theta, t) \partial_r \Phi_0(r, \theta) = 0. \quad (3)$$

динамическое:

$$\begin{aligned} & -g(\xi(0, t) - \xi(\theta, t) \cos \theta) - \partial_t \Psi(r, \theta, t) + \\ & + r \partial_\theta \Phi_0(r, \theta) \partial_\theta \Phi_1(r, \theta, t) + \\ & + r^3 \partial_r \Phi_0(r, \theta) \partial_r \Phi_1(r, \theta, t) + \\ & + \frac{\xi(\theta, t)}{4\pi r^3} \left[ -(\Phi_0(r, \theta))^2 + r \partial_\theta \Phi_0(r, \theta) \partial_{r, \theta} \Phi_0(r, \theta) + \right. \\ & \left. + r^3 \partial_r \Phi_0(r, \theta) \partial_{r, r} \Phi_0(r, \theta) \right] + \frac{H(\theta, \xi)}{r^2 \sqrt{r^2 + (\partial_\theta h(\theta))^2}} = 0; \\ & H(\theta, \xi) \equiv \left[ 2r^5 + 5r^3 (\partial_\theta h(\theta))^2 + 2r^4 \partial_{\theta, \theta} h(\theta) - r^2 (\partial_\theta h(\theta))^2 \partial_{\theta, \theta} h(\theta) + \right. \\ & + (2r^4 \partial_\theta h(\theta) + 3r^2 (\partial_\theta h(\theta))^3 + (\partial_\theta h(\theta))^5) \operatorname{ctg} \theta \left. \right] \xi(\theta, t) + \\ & + \left( r^3 \left( r^2 + (\partial_\theta h(\theta))^2 \right) \alpha g \theta - 3r^2 \left( (\partial_\theta h(\theta))^2 + r \partial_{\theta, \theta} h(\theta) \partial_\theta h(\theta) \right) \partial_\theta \xi(\theta, t) + \right. \\ & \left. + r^3 \left( r^2 + (\partial_\theta h(\theta))^2 \right) \partial_{\theta, \theta} \xi(\theta, t) \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

Решения уравнений Лапласа, удовлетворяющие граничным условиям, условиям сохранения заряда и объема, а также неподвижности центра масс, имеют вид:

$$\Phi_1(r, \theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} r^{-(1+n)} A_n(t) P_n(\mu); \quad (5)$$

$$\Psi(r, \theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} r^n B_n(t) P_n(\mu). \quad (6)$$

Исходя из уравнения эквипотенциальности (3), возмущение  $\xi(\theta, t)$  поверхности следует искать в виде:

$$\xi(\theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n(t) P_n(\mu). \quad (7)$$

В выражениях (5)–(7)  $A_n(t)$ ,  $B_n(t)$  и  $\alpha_n(t)$  – неизвестные функции от времени и других физико-химических параметров задачи;  $P_n(\mu)$  –  $n$ -й осесимметричный полином Лежандра [22].

Проекты решений (5)–(7) подставим в уравнения (2)–(4). Перегруппируем слагаемые в уравнениях так, чтобы уравнения представляли собой сумму полиномов Лежандра с некоторыми коэффициентами. Равенство нулю полученных уравнений можно удовлетворить, положив равными нулю коэффициенты при каждом полиноме Лежандра (в силу их ортогональности). Сохраним в коэффициентах при полиномах Лежандра слагаемые с точностью до  $\sim \beta^4$ .

Амплитуды гидродинамического и электростатического потенциалов будем искать в виде разложений по малому параметру  $\beta$ :

$$\begin{aligned} A_n(t) &= \sum_{i=0}^4 \beta^i A_n^{(i)}(t) + O(\beta^5); \\ B_n(t) &= \sum_{i=0}^4 \beta^i B_n^{(i)}(t) + O(\beta^5). \end{aligned}$$

Из кинематического условия и условия эквипотенциальности выразим зависимость амплитуды  $A_n^{(i)}(t)$  и  $B_n^{(i)}(t)$  через  $\alpha_n(t)$  и, подставив полученные соотношения в динамическое граничное условие, получим эволюционное уравнение для амплитуд мод осцилляций, имеющее вид:

$$\frac{\partial^2 \alpha_n(t)}{\partial t^2} + \Omega_n^2 \cdot \alpha_n(t) = N(t); \quad (8)$$

где  $N(t)$  – функция неоднородности, в данном рассмотрении не приводится ввиду ее большой громоздкости и отсутствия необходимости.

Решение однородной части уравнения (8) имеет вид:

$$\alpha_n(t) = \chi_n \cos(\Omega_n t);$$

где  $\Omega_n$  – частота  $n$ -й моды, которая включает в себя частоту осцилляций  $\omega_n$  заряженной сферической капли в отсутствие гравитационного и электростатического полей и деформационную поправку  $\Delta\omega_n$  к частоте  $\omega_n$ , возникающую из-за наличия внешних гравитационного и электростатического полей:

$$\Omega_n = \omega_n + \beta^2 (\Delta\omega_n);$$

$$\omega_n = \sqrt{n(n-1)(2+n-4W)}. \quad (9)$$

Если расписать все коэффициенты, входящие в определение  $\Omega_n$ , в частности коэффициенты

Клебша-Гордана [22], то поправка  $\Delta\omega_n$  примет вид:

$$\Delta\omega_n \equiv \frac{1}{2} \frac{\gamma_n(W)}{\omega_n} + \beta^2 \left( \frac{1}{2} \frac{\nu_n(W)}{\omega_n} - \frac{1}{8} \frac{\gamma_n^2(W)}{\omega_n^3} \right); \quad (10)$$

$$\gamma_n(W) = \frac{n}{(3+2n)(2n+1)(2n-1)} \times \\ (2-4W+n(7-8W)+n^2(17-8W)- \\ -3n^3(7-8W)-n^4(23-16W)-2n^5);$$

$$\nu_n(W) = \frac{n}{630(2n-1)^2(2n+1)^2(2n-3)(2n+3)^2(2n+5)(3-2W)(4W-5)} \times \\ \times (F_0+nF_1+n^2F_2+n^3F_3+n^4F_4+n^5F_5+n^6F_6+n^7F_7+n^8F_8+n^9F_9+n^{10}F_{10});$$

где аналитические выражения для коэффициентов  $F_m$  не приводятся в силу их громоздкости, а также потому, что они приведены в [15].

Множитель  $\Delta\omega_n$  при поправке  $\beta^2\Delta\omega_n$  вычислен в первом порядке малости по амплитуде осцилляций и во втором порядке по величине стационарной деформации сферической капли (отклонение деформированной поверхности от сферы  $\sim \beta^2$ ). Следует учесть, что

$$\beta \approx e = \frac{3\sqrt{w}}{\sqrt{1-W}}; \quad (11)$$

где  $e$  – эксцентриситет слабо сфероидальной капли [18]. В итоге  $\Omega_n$ , а также  $\Delta\omega_n$  будут функциями  $w$ . Параметры  $w$  и  $W$  связаны между собой условиями подвеса [14, 18]:

$$g = \frac{3QE_0}{4\pi R^3\rho}.$$

В безразмерном виде:

$$g = \frac{3}{4\pi} QE_0 = 12\sqrt{wW}. \quad (12)$$

### АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ ДЕФОРМАЦИОННОЙ ПОПРАВКИ К ЧАСТОТЕ

На рис. 1 над плоскостью значений  $W$  и  $w$  представлены поверхности  $J_1 = \omega_n$  и  $J_2 = -\Delta\omega_n$  в зависимости от величин параметров Рэлея  $W$  и Тейлора  $w$  для основной моды ( $n = 2$ ) осцилляций капли в условиях электростатического подвеса. Соотношение (11) в контексте сказанного выше означает, что поверхность  $J_2$  приведена на рис. 1 приближенно, при выполнении знака равенства между  $e$  и  $\beta$  в (11). Несложно видеть, что при приближении параметров  $W$  и  $w$  к критическим значениям деформационная поправка к частоте становится сравнима с самой частотой, чем отличается от

поправки к частоте, связанной с конечностью амплитуды, которая  $\sim \varepsilon^2$ , и всегда мала.

На рис. 2а представлена зависимость частоты  $\omega_n$  (жирная линия) и нелинейной деформационной поправки  $\Delta\omega_n$  от параметра Рэлея для основной моды ( $n = 2$ ) и при различных значениях радиуса капли. Не трудно заметить, что с увеличением радиуса капли деформационная поправка  $\Delta\omega_n$  увеличивается по абсолютной величине. Так как поправка  $\Delta\omega_n$  отрицательна, то частота осцилляций заряженной капли, находящейся во внешнем электростатическом поле, будет уменьшаться, что продемонстрировано на рис. 2б, где изображена зависимость частоты  $\Omega_n$  от параметра Рэлея для основной моды ( $n = 2$ ) при тех же условиях.

Качественно подобный вид имеют зависимости частоты от плотности жидкости и величины ее коэффициента поверхностного натяжения.

На рис. 3 представлена зависимость частоты  $\Omega_n$  от параметра Рэлея для основной моды ( $n = 2$ ) при  $R = 1$  мм,  $\sigma = 73$  dyne/cm и различных значениях плотности вещества капли  $\rho = 1,1$  г/см<sup>3</sup> (сплошная линия),  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup> (пунктирная линия) и  $\rho = 0,9$  г/см<sup>3</sup> (точечная линия). При увеличении плотности вещества капли деформационная поправка уменьшается, и, как видно из рисунка, это приводит к уменьшению частоты осцилляций заряженной капли, находящейся во внешнем электростатическом поле.

На рис. 4 представлена зависимость частоты  $\Omega_n$  от параметра Рэлея для основной моды ( $n = 2$ ) при  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>,  $R = 1$  мм и различных значениях коэффициента поверхностного натяжения вещества капли  $\sigma = 86$  dyne/cm (сплошная линия),  $\sigma = 73$  dyne/cm (пунктирная линия) и  $\sigma = 60$  dyne/cm (точечная линия). При увеличении коэффициента поверхностного натяжения деформационная поправка возрастает и, как видно из рисунка, увеличивается частота осцилляций заряженной капли, находящейся во внешнем электростатическом поле.

Как следует из проведенных расчетов, деформационные поправки к частотам осцилляций заряженной капли в электростатических подвесах могут достигать величин, сравнимых с самими частотами, что должно учитываться. Так, в бесконтактных способах измерения физико-химических свойств жидкостей, использующих электростатические подвесы (см., например, [10]), знание точных значений частоты осцилляций капли необходимо. Погрешность измерения, например величины коэффициента поверхност-

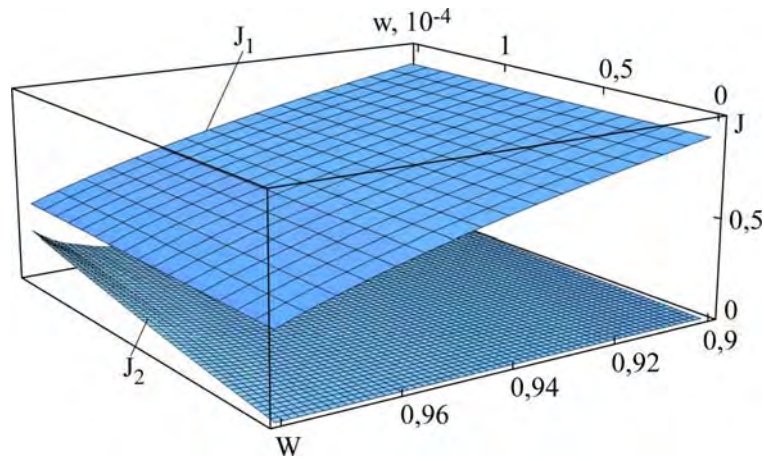


Рис. 1. Зависимости поверхностей  $J_1 = \omega_2$  и  $J_2 = -\Delta\omega_2$  от параметров Рэлея  $W$  и Тейлора  $J$ .

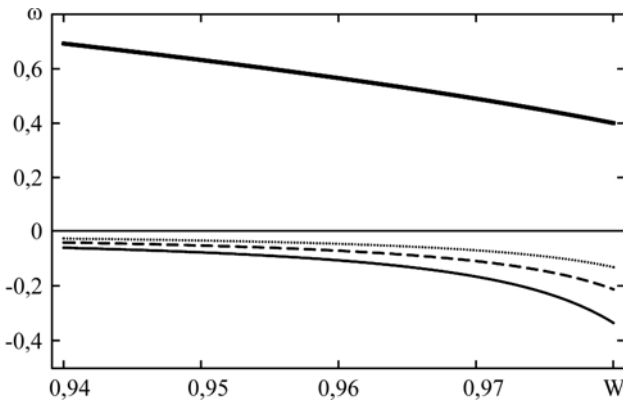


Рис. 2а. Зависимости  $\omega_2$  (жирная сплошная линия) и  $\Delta\omega_2$  от параметра Рэлея  $W$  при  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $\sigma = 73 \text{ дине/см}$  и  $R = 1,1 \text{ мм}$  (толстая сплошная линия),  $R = 1 \text{ мм}$  (пунктирная линия) и  $R = 0,9 \text{ мм}$  (точечная линия).

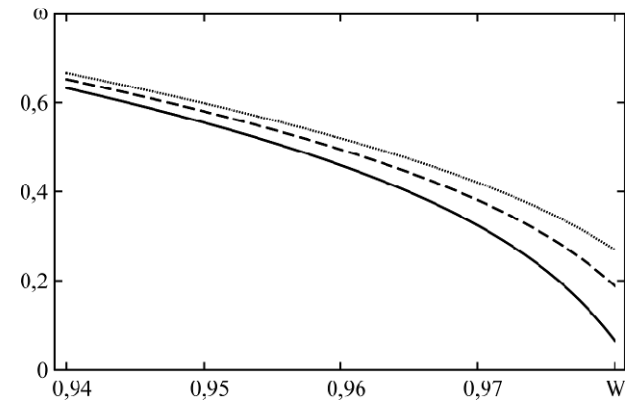


Рис. 2б. Зависимости  $\Omega_2$  от параметра Рэлея  $W$  при  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $\sigma = 73 \text{ дине/см}$  и  $R = 1,1 \text{ мм}$  (тонкая сплошная линия),  $R = 1 \text{ мм}$  (пунктирная линия) и  $R = 0,9 \text{ мм}$  (точечная линия).

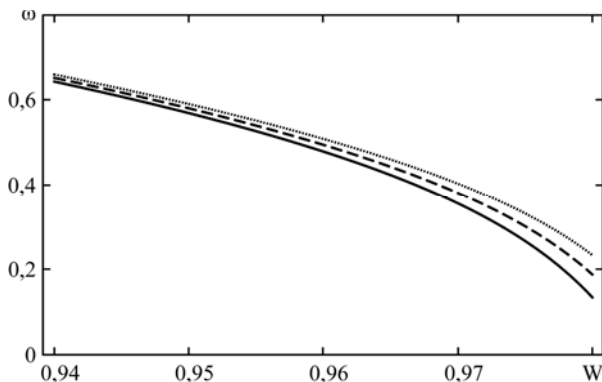


Рис. 3. Зависимости  $\Omega_2$  от параметра Рэлея  $W$  при  $R = 1 \text{ мм}$ ,  $\sigma = 73 \text{ дине/см}$  и  $\rho = 1,1 \text{ г/см}^3$  (сплошная линия),  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$  (пунктирная линия) и  $\rho = 0,9 \text{ г/см}^3$  (точечная линия).

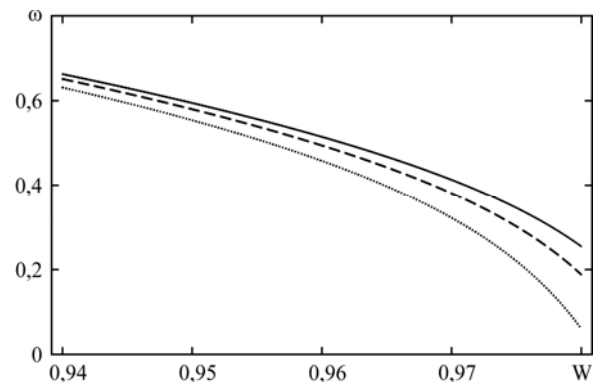


Рис. 4. Зависимости  $\Omega_2$  от параметра Рэлея  $W$  при  $R = 1 \text{ мм}$ ,  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$  и  $\sigma = 86 \text{ дине/см}$  (сплошная линия),  $\sigma = 73 \text{ дине/см}$  (пунктирная линия) и  $\sigma = 60 \text{ дине/см}$  (точечная линия).

ного натяжения, прямо определяется погрешностью вычисления частоты.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нелинейная деформационная поправка к частоте осцилляций сильно заряженной капли, подвешенной в коллинеарных гравитационном и внешнем однородном электростатическом полях, обусловлена стационарной деформацией, всегда имеет отрицательный знак, а ее величина зависит от всех физических параметров задачи.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ: № 14-01-00170 и № 14-08-00240.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Курчатov И.В., Наследов Д.Н., Семенов Н.Н., Харитон Ю.Б. *Электронные явления*. Л.: Онти-Химтеорет, 1935. 388 с.
2. Doyle A., Moffet D.R., Vonnegut B. *J Coll Sci*. 1964, **19**, 136–143.
3. Berg T.G.O., Trainor R.J., Vaughan U. Stable. *J Atmosph Sci*. 1970, **27**(11), 1173–1181.

4. Schweizer J.D., Hanson D.N. *J Coll Int Sci.* 1971, **35**(3), 417–423.
5. Roulleau M., Desbois M. *J Atmosph Sci.* 1972, **29**(4), 565–569.
6. Duft D., Lebbeus H., Huber B.A. *Phys Rev Lett.* 2002, **89**(8), 1–4.
7. Grimm R.L., Beauchamp J.L. *J Phys Chem. B.* 2005, **109**, 8244–8250.
8. Hunter H.C., Ray Asit K. *Phys Chem Chem Phys.* 2009, **11**(29), 6156–6165.
9. Fong Chee Sheng, Black N.D., Kiefer P.A., Shaw R.A. *Am J Phys.* 2007, **75**(6), 499–503.
10. Won-Kyu Rhim, Ishikawa T. *Rev Sci Instr.* 2001, **72**(9), 3572–3575.
11. Colver G.M., Kim S.W., Tae-U.Yu. *J Electrostatic.* 1996, **37**(3), 151–172.
12. Григорьев А.И., Синкевич О.А. *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1985, (6), 10–15.
13. Cheng K.J. *Phys Lett.* 1985, **112A**(8), 392–396.
14. Ширяева С.О. *ЖТФ.* 2006, **76**(3), 93–95.
15. Ширяева С.О., Петрушов Н.А., Григорьев А.И. *ЖТФ.* 2016, **86**(1), 37–44.
16. Tsamopolous J.A., Brown R.A. *J Fluid Mech.* 1984, **147**, 373–395.
17. Ширяева С.О. *ЖТФ.* 2014, **84**(6), 26–32.
18. Ширяева С.О., Петрушов Н.А., Григорьев А.И. *ЖТФ.* 2015, **85**(8), 33–39.
19. Rayleigh (Strutt J.W.) *Phil Mag.* 1882, **14**, 184–186.
20. Taylor G.I. *Proc Roy Soc London.* 1964, **A280**, 383–397.
21. Найфе А.Х. *Методы возмущений.* М.: Мир, 1976. 455 с.
22. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. *Квантовая теория углового момента.* Л.: Наука, 1975. 436 с.

Поступила 18.12.15

После доработки 26.01.16

### Summary

In nonlinear asymptotic calculations of the fourth order for eccentricity size (which measures the stationary deformation of the charged drop in an external electrostatic field) and of the first order for the dimensionless amplitude of its oscillation, the frequency of a strongly charged drop in a weaker external uniform electrostatic field is calculated. The deformation amendments to the frequency connected with the change of an equilibrium form of a drop in comparison with its spherical one are found. As the drop surface area in an external field increases, the frequency of the oscillation of the drop decreases and the deformation amendment has one sign (negative). When the drop charge tends to the critical (to the limit as the stability in relation to the superposition of its own and induced charges), the amendment size is comparable with the frequency by the order of magnitude.

*Keywords:* drop, charge, electrostatic field, frequency, deformation nonlinear amendment.