

# О форме заряженной капли в электростатическом поле вытянутого сфероида, поддерживаемого при постоянном потенциале

\* С. О. Ширяева, \*\* А. И. Григорьев, А. А. Ширяев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, \*e-mail: [shir@uniyar.ac.ru](mailto:shir@uniyar.ac.ru), \*\*e-mail: [grigorai@mail.ru](mailto:grigorai@mail.ru)

В асимптотических расчетах найдена равновесная форма заряженной капли в неоднородном электростатическом поле, создаваемом вытянутым сфероидом, который моделирует стержень, поддерживаемый при постоянном электрическом потенциале. Выяснилось, что величина малой оси сфероида (толщина стержня), создающего поле, заметно сказывается на равновесной форме заряженной капли. Искажение сферической формы поверхности заряженной проводящей капли идеальной несжимаемой жидкости в неоднородном электростатическом поле стержня можно приближенно описывать суперпозицией нескольких первых полиномов Лежандра, количество которых определяется требуемой степенью точности описания.

*Ключевые слова:* капля, заряд, электростатическое поле, стержень, создающий поле, моделируемый вытянутым сфероидом.

УДК 532.6

## ВВЕДЕНИЕ

Задача расчета равновесных форм заряженной капли в неоднородных электростатических полях представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими исследованиями. В частности, эта задача привлекает внимание из-за проблем бесконтактного определения физико-химических свойств жидкостей [1] и экспериментальной проверки критерия Рэлея [2] реализации электростатической неустойчивости сильно заряженной капли [3–6], так как в большинстве видов электростатических подвесов для удержания и позиционирования заряженной капли используются неоднородные электростатические поля. Любопытна эта задача и с точки зрения анализа закономерностей эволюционирования кластерно-капельной фазы пучков ионов в жидкометаллических источниках и жидкостных масс-спектрометрах [7–8]. От равновесной формы капли зависят также и критические условия реализации неустойчивости заряженной электропроводной капли [9]. Решению указанной задачи и посвящено настоящее исследование.

Рассмотрим случай внешнего неоднородного поля, создаваемого стержнем конечной длины и толщины, поддерживаемым при постоянном потенциале (или заряженным стержнем), как пример наиболее часто реализуемой на практике ситуации (см., например, [6]). Сходная задача уже рассматривалась в [10], но неоднородное электростатическое поле моделировалось полем отрезка бесконечно тонкой нити (аналитическое выражение для потенциала нити см., например, [11, стр. 227, задача 74]).

В реальности электростатическое поле стержня конечной длины и толщины имеет сложную конфигурацию, и для него не существует точного аналитического выражения, необходимого для строгого решения задачи. Поэтому в нижеследующих построениях будем моделировать электростатическое поле стержня полем сильно вытянутого заряженного проводящего сфероида [12, стр. 40]. Большая и малая полуоси сфероида будут характеризовать длину и толщину стержня соответственно, что позволит проанализировать влияние этих параметров на полученное решение.

Целесообразно отметить, что комбинация стержневого электрода и противоэлектрода в виде плоского кольца характерна для многочисленных аппаратов и устройств для электродиспергирования инсектицидов, горюче-смазочных и лакокрасочных материалов (см., например, обзоры [13–15] и указанную там литературу).

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим сферическую каплю радиусом  $R$  идеальной, несжимаемой, идеально проводящей жидкости с плотностью  $\rho$ , коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ , несущую заряд  $Q$ . Пусть центр капли располагается на продольной оси симметрии проводящего стержня длиной  $2a$  и диаметром  $2b$  на расстоянии  $L$  от его торца. Стержень поддерживается при постоянном потенциале  $\phi_0$ .

Поскольку внешнее электростатическое поле приводит к нарушению сферичности капли, зададимся целью определить форму ее равновесной поверхности. Задачу будем решать в сфери-

ческих координатах  $(r, \theta, \varphi)$  с началом в центре масс капли. Ось  $OZ$ , от положительного направления которой отсчитывается угол  $\theta$ , будем считать совпадающей с продольной осью симметрии стержня, направленной от центра масс капли к стержню (рис. 1).

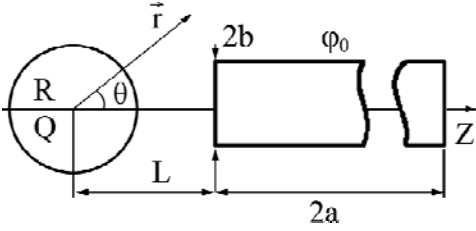


Рис. 1. Взаимное расположение стержня и заряженной капли.

Система отсчета является неинерциальной в связи с наличием ускоренного движения заряженной капли как целого во внешнем электрическом поле.

Равновесная форма капли  $r(\theta)$  определяется из условия баланса давлений на поверхности капли:

$$P_0 + P_{in}(\vec{r}) - P_{atm} + P_E(\vec{r}) = P_\sigma(\vec{r}). \quad (1)$$

В (1)  $P_0$  – гидростатическое давление;  $P_{atm}$  – давление внешней среды;  $P_{in}(\vec{r})$  – давление инерции, связанное с неинерциальностью выбранной системы отсчета;  $P_E(\vec{r})$  – электростатическое и  $P_\sigma(\vec{r})$  – капиллярное давления, выражающиеся формулами:

$$P_E(\vec{r}) = \frac{\vec{E}^2(\vec{r})}{8\pi}; \quad P_\sigma(\vec{r}) = \sigma \cdot \text{div} \vec{n}(\vec{r}).$$

Здесь  $\vec{E}^2(\vec{r})$  – напряженность электростатического поля в окрестности капли;  $\vec{n}(\vec{r})$  – орт нормали к поверхности капли, определяемый по формуле:

$$\vec{n}(\vec{r}) = \frac{\nabla(r - r(\theta))}{|\nabla(r - r(\theta))|} \Big|_{r=r(\theta)}.$$

Для вычисления электрического давления на поверхность капли необходимо определить потенциал поля  $\Phi(\vec{r})$  в окрестности капли. Этот потенциал будет суперпозицией внешнего по отношению к капле потенциала  $\Phi_r(\vec{r})$ , создаваемого стержнем, и потенциала  $\Phi_d(\vec{r})$ , создаваемого собственным зарядом капли:

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_r(\vec{r}) + \Phi_d(\vec{r}).$$

Аналитическое выражение потенциала стержня, моделируемого потенциалом проводящего сфероида, получим следующим образом: в известном [12, с. 40] выражении для потенциала

заряженного проводящего сфероида заменим заряд через потенциал и емкость сфероида. В итоге в декартовой системе координат, связанной с центром сфероида, аналитическое выражение для потенциала примет вид:

$$\Phi_{sph}(\vec{r}) = \frac{\varphi_0}{\text{Arcth} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} \times \quad (2)$$

$$\times \text{Arcth} \left[ 2 \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\left( \sqrt{(-\sqrt{a^2 - b^2} + z)^2 + x^2 + y^2} + \sqrt{(\sqrt{a^2 - b^2} + z)^2 + x^2 + y^2} \right)^2}} \right],$$

где  $a$  и  $b$  – большая и малая полуоси сфероида.

Положим, что капля идеально проводящая, то есть будем считать, что характерное гидродинамическое время много больше времени релаксации заряда капли. Поверхность капли примем эквипотенциальной и сформулируем краевую задачу для определения потенциала вблизи поверхности капли:

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = 0; \quad \Phi(\vec{r})|_{r=r(\theta)} = \text{Const}; \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi \rightarrow 0.$$

Дополним постановку задачи тремя условиями: сохранения объема капли, неподвижности ее центра масс в выбранной системе и сохранения заряда капли:

$$\iiint_V dV = \frac{4}{3}\pi R^3; \quad \iiint_V \vec{r} dV = 0; \quad \iint_S \kappa(\vec{r}) \cdot dS = Q;$$

$$\{V: 0 \leq r \leq r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\};$$

$$\{S: r = r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\};$$

где  $\kappa$  – поверхностная плотность заряда на капле:

$$\kappa(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} (\vec{E}(\vec{r}), \vec{n}(\vec{r})).$$

Для удобства расчетов перейдем к безразмерным переменным, принимая  $R = \rho = \sigma = 1$ . Сохраним за безразмерными физическими величинами прежние обозначения.

Величины гидродинамического и электрического потенциалов, напряженности электростатического поля и поля скоростей будут выражены в долях своих характерных масштабов:

$$\psi_* = R^{1/2} \rho^{-1/2} \sigma^{1/2}; \quad \varphi_* = R^{1/2} \sigma^{1/2};$$

$$E_* = R^{-1/2} \sigma^{1/2}; \quad V_* = R^{-1/2} \rho^{-1/2} \sigma^{1/2}.$$

Равновесную форму капли  $r(\theta)$  будем искать как суперпозицию сферической формы поверхности и ее малого безразмерного искажения  $h(\theta)$ :  $\max |h(\theta)| \ll 1$ . Искание представим в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$r(\theta) = 1 + h(\theta); \quad h(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot P_n(\mu); \quad \mu \equiv \cos \theta. \quad (3)$$

Поскольку собственный заряд капли сам по себе не нарушает сферичности ее формы, то искажение формы равновесной поверхности капли определится давлением электростатического поля в окрестности капли. Поэтому можно записать следующие оценки для порядков величин:

$$(E_r(\vec{r}))^2 \sim (\Phi_r(\vec{r}))^2 \sim \max |h(\theta)|.$$

В безразмерных переменных оценка величины внешнего поля и потенциала примет вид:

$$E_r(\vec{r}) \sim \Phi_r(\vec{r}) \sim (\max |h(\theta)|)^{1/2} = \varepsilon^{1/2};$$

где  $\varepsilon \equiv \max |h(\theta)|$  – безразмерный параметр.

Будем рассматривать малые отклонения формы капли от сферы, полагая  $\varepsilon$  малым параметром задачи и учитывая слагаемые до величины порядка  $\varepsilon^1$  включительно.

Оценивая величины давлений, входящих в динамическое условие (1), получим, что гидростатическое давление  $P_0$  и давление внешней среды  $P_{atm}$  имеют порядок  $\varepsilon^0$ , поскольку не зависят от формы поверхности капли. Примем, что характерное время формирования равновесной поверхности капли много меньше времени существенного смещения центра масс капли под действием внешнего электрического поля. Так как давление инерции  $P_{in}(\vec{r}, t)$  вызвано прежде всего взаимодействием заряда капли с внешним полем, то оно будет иметь порядок  $P_{in} \sim Q \cdot E_r \sim \varepsilon^{1/2}$  (так как наличие заряда на капле не приводит к нарушению ее сферической формы, то есть  $Q \sim \varepsilon^0$ ). Поправки к силе инерции со стороны других эффектов рассматривать не будем, так как они пренебрежимо малы по сравнению с указанным выше эффектом. Давление капиллярных сил определяется размером капли и формой искажения ее поверхности, поэтому оно имеет компоненты нулевого и первого порядков  $P_\sigma(\vec{r}) = P_\sigma^0(\vec{r}) + P_\sigma^1(\vec{r})$ . Здесь и далее по тексту работы верхними индексами будут обозначены порядки малости величин по  $\varepsilon$ .

Определяющий электрическое давление потенциал  $\Phi(\vec{r})$  будет иметь три компоненты  $\Phi(\vec{r}) = \Phi^0(\vec{r}) + \Phi^{1/2}(\vec{r}) + \Phi^1(\vec{r})$ . Здесь  $\Phi^0(\vec{r})$  – потенциал, создаваемый собственным зарядом неискаженной капли;  $\Phi^{1/2}(\vec{r})$  – потенциал, создаваемый зарядами, индуцированными внешним электростатическим полем в сферической

капле;  $\Phi^1(\vec{r})$  – компонента, связанная с изменением поля, обусловленным искажением сферической формы капли. Аналогичным образом электрическое давление также представляется в виде разложения:

$$P_E(\vec{r}) = P_E^0(\vec{r}) + P_E^{1/2}(\vec{r}) + P_E^1(\vec{r}).$$

#### ЗАДАЧА ПОРЯДКА $\varepsilon^0$

Такая задача описывает сферическую заряженную каплю в отсутствие внешнего поля и формулируется следующими уравнениями:

$$P_0 - P_{atm} + P_E^0(\vec{r}) = P_\sigma^0;$$

$$P_E^0(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} \left( \nabla \Phi^0(\vec{r}) \right)^2 \Big|_{r=1};$$

$$P_\sigma^0 = 2; \quad \Delta \Phi^0(\vec{r}) = 0;$$

$$\Phi^0(\vec{r}) \Big|_{r=1} = \text{const}; \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi^0(\vec{r}) \rightarrow 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \partial_r \Phi^0(\vec{r}) \Big|_{r=1} d\varphi d\mu = -4\pi Q.$$

Решая представленную задачу, получим выражение для компоненты электрического потенциала собственного заряда сферической капли:

$$\Phi^0(\vec{r}) = \frac{Q}{r}. \quad (4)$$

#### ЗАДАЧА ПОРЯДКА $\varepsilon^{1/2}$

Перейдем к рассмотрению задачи порядка  $\varepsilon^{1/2}$ , описывающей перераспределение заряда капли во внешнем электростатическом поле:

$$\Delta \Phi^{1/2}(\vec{r}) = 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi^{1/2}(\vec{r}) \rightarrow 0;$$

$$r = 1: \quad P_{in}(\vec{r}) + P_E^{1/2}(\vec{r}) = 0;$$

$$P_E^{1/2}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left( \nabla \Phi^0 \cdot \nabla \Phi^{1/2}(\vec{r}) \right); \quad \Phi^{1/2} = \text{Const};$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \partial_r \Phi^{1/2}(\vec{r}) \Big|_{r=1} d\varphi d\mu = 0.$$

Здесь потенциал  $\Phi^{1/2}(\vec{r})$  складывается из внешнего для капли потенциала стержня  $\Phi_r(\vec{r})$  и имеющей соответствующий порядок малости компоненты потенциала капли  $\Phi_d^{1/2}(\vec{r})$ :  $\Phi^{1/2}(\vec{r}) = \Phi_r(\vec{r}) + \Phi_d^{1/2}(\vec{r})$ . Потенциал, создаваемый стержнем  $\Phi_r(\vec{r})$ , известен (см. (2)), но в сферической системе координат, связанной с центром масс капли, переписется в виде:

**Таблица 1.** Коэффициенты  $F_k$  в разложении в ряд по полиномам Лежандра потенциала электрического поля, создаваемого стержнем на поверхности капли, рассчитанные при  $L = 2$ ,  $b = 1$ ,  $\varphi_0 = 1$  (в размерных единицах  $\varphi_0 = 454$  В для  $R = 1$  мм,  $\sigma = 23$  дин/см)

$F_k$	$a = 10$	$a = 30$	$a = 100$
$F_0$	0,396	0,418	0,435
$F_1$	$0,739 \times 10^{-1}$	$0,586 \times 10^{-1}$	$0,466 \times 10^{-1}$
$F_2$	$0,197 \times 10^{-1}$	$0,150 \times 10^{-1}$	$0,117 \times 10^{-1}$
$F_3$	$0,646 \times 10^{-2}$	$0,496 \times 10^{-2}$	$0,390 \times 10^{-2}$
$F_4$	$0,236 \times 10^{-2}$	$0,185 \times 10^{-2}$	$0,146 \times 10^{-2}$
$F_5$	$0,922 \times 10^{-3}$	$0,732 \times 10^{-3}$	$0,582 \times 10^{-3}$
$F_6$	$0,375 \times 10^{-3}$	$0,303 \times 10^{-3}$	$0,242 \times 10^{-3}$
$F_7$	$0,157 \times 10^{-3}$	$0,129 \times 10^{-3}$	$0,103 \times 10^{-3}$

$$\Phi_r(\vec{r}) = \frac{\varphi_0}{\text{Arcth} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} \times \quad (5)$$

$$\times \text{Arcth} \frac{\sqrt{4(a^2 - b^2)}}{\sqrt{\left(\sqrt{(\eta\mu - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + r^2(1 - \mu^2)} + \sqrt{(\eta\mu + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + r^2(1 - \mu^2)}\right)^2}}.$$

Следует отметить, что потенциал  $\Phi_r(\vec{r})$  является решением уравнения Лапласа и удовлетворяет условию убывания до нуля на бесконечности. Учитывая это, из выписанной выше краевой задачи получим задачу для соответствующей компоненты потенциала капли  $\Phi_d^{1/2}(\vec{r})$ :

$$\Delta \Phi_d^{1/2}(\vec{r}) = 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi_d^{1/2}(\vec{r}) \rightarrow 0; \quad (6)$$

$$\Phi_d^{1/2}(\vec{r}) \Big|_{r=1} = \text{Const} - \Phi_r(\vec{r}) \Big|_{r=1}; \quad (7)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \partial_r \Phi_d^{1/2}(\vec{r}) \Big|_{r=1} d\varphi d\mu = - \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (\partial_r \Phi_r(\vec{r})) \Big|_{r=1} d\varphi d\mu. \quad (8)$$

Убывающее с расстоянием решение уравнения Лапласа (6) для потенциала  $\Phi_d^{1/2}$  имеет вид разложения по полиномам Лежандра  $P_k(\mu)$ :

$$\Phi_d^{1/2}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{1/2} r^{-(k+1)} P_k(\mu). \quad (9)$$

Подставляя полученный вид  $\Phi_d^{1/2}(\vec{r})$  (9) в условие эквипотенциальности (7), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k^{1/2} P_k(\mu) = \text{const} - \Phi_r(\vec{r}) \Big|_{r=1}. \quad (10)$$

Для удовлетворения данному условию при любом угле  $\theta$  необходимо представить потенциал  $\Phi_r(\vec{r}) \Big|_{r=1}$  в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$\Phi_r(\vec{r}) \Big|_{r=1} = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \cdot P_k(\mu); \quad (11)$$

$$F_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \Phi_r(\vec{r}) \Big|_{r=1} P_k(\mu) d\mu; \quad (12)$$

где потенциал  $\Phi_r(\vec{r})$  определяется формулой (5); коэффициенты  $F_k$  зависят от параметров поля стержня  $\varphi_0$ ,  $a$ ,  $b$  и расстояния до конца стержня  $L$ . Аналитическое вычисление  $F_k$  весьма проблематично в связи с громоздкостью рассматриваемого потенциала  $\Phi_r(\vec{r})$ , поэтому целесообразно использовать численные оценки данных коэффициентов. При таком подходе приходится обрывать бесконечный ряд (11) на конечном количестве членов. В табл. 1 представлены величины коэффициентов  $F_k$  при разных длинах стержня. Видно, что с ростом номера моды  $k$  при любых длинах стержня коэффициенты быстро убывают, поэтому использование в (11) конечного числа слагаемых вместо бесконечного ряда оправдано. (Можно отметить, что с увеличением длины стержня коэффициенты  $F_k$  незначительно убывают.)

В табл. 2 приведены коэффициенты  $F_k$ , рассчитанные при большем расстоянии от конца стержня до капли. Сравнивая данные двух таблиц, можно сделать вывод, что скорость убывания коэффициентов  $\frac{F_k}{F_{k-1}} \sim \frac{1}{L}$ , то есть на большем удалении от конца стержня, ряд сходится еще быстрее.

Оценим величину относительной ошибки  $\delta$ , совершаемой при замене точного значения потенциала  $\Phi_r$  на поверхности сферы  $r = 1$  его приближенным значением, которое запишем в виде конечной суммы:

$$\Phi_{ap} = \sum_{k=0}^{k_m} F_k \cdot P_k(\mu).$$

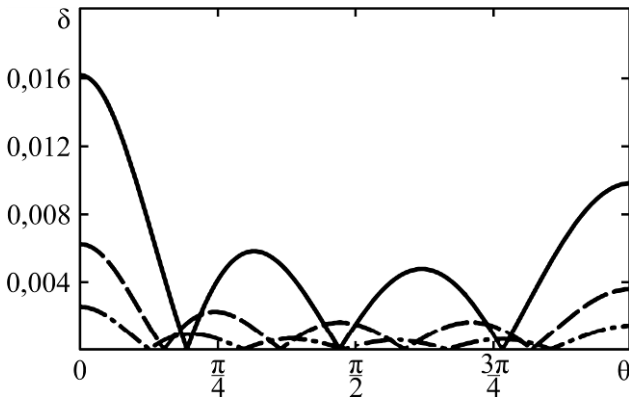
Определим относительную погрешность в соответствии со следующим выражением:

$$\delta = \left| \frac{\Phi_{ap} - \Phi_r}{\Phi_r} \right| \Big|_{r=1}.$$

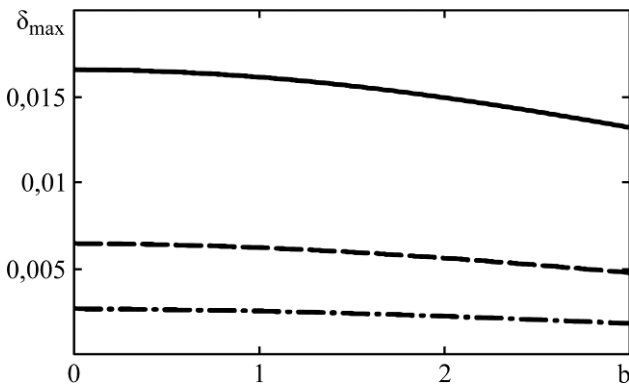
**Таблица 2.** Коэффициенты  $F_k$  в разложении в ряд по полиномам Лежандра потенциала электрического поля, создаваемого стержнем на поверхности капли, рассчитанные при  $L = 5$ ,  $b = 1$ ,  $\varphi_0 = 1$  (в размерных единицах  $\varphi_0 = 454$  В для  $R = 1$  мм,  $\sigma = 23$  дин/см)

$F_k$	$a = 10$	$a = 30$	$a = 100$
$F_0$	0,267	0,313	0,350
$F_1$	$0,264 \times 10^{-1}$	$0,225 \times 10^{-1}$	$0,184 \times 10^{-1}$
$F_2$	$0,314 \times 10^{-2}$	$0,241 \times 10^{-2}$	$0,189 \times 10^{-2}$
$F_3$	$0,429 \times 10^{-3}$	$0,322 \times 10^{-3}$	$0,251 \times 10^{-3}$
$F_4$	$0,641 \times 10^{-4}$	$0,482 \times 10^{-4}$	$0,376 \times 10^{-4}$
$F_5$	$0,102 \times 10^{-4}$	$0,769 \times 10^{-5}$	$0,601 \times 10^{-5}$
$F_6$	$0,168 \times 10^{-5}$	$0,128 \times 10^{-5}$	$0,100 \times 10^{-5}$
$F_7$	$0,285 \times 10^{-6}$	$0,218 \times 10^{-6}$	$0,171 \times 10^{-6}$

На рис. 2 представлены зависимости относительной погрешности  $\delta$  от угла  $\theta$  при разных значениях  $k_m$ , из которых видно, что наибольшее расхождение точного и приближенного значений потенциалов наблюдается в точках  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ .



**Рис. 2.** Зависимость относительной погрешности потенциала  $\delta$  от угла при разном количестве учитываемых полиномов  $k_{\max}$  и следующих значениях параметров:  $L = 2$ ,  $a = 30$ ,  $b = 1$ . Сплошная линия соответствует  $k_{\max} = 2$ , пунктирная –  $k_{\max} = 3$ , штрихпунктирная –  $k_{\max} = 4$ .



**Рис. 3.** Зависимость максимальной по углу погрешности потенциала  $\delta$  от толщины стержня при разном количестве учитываемых полиномов  $k_{\max}$  и следующих значениях параметров:  $L = 2$ ,  $a = 30$ . Сплошная линия соответствует  $k_{\max} = 2$ , пунктирная –  $k_{\max} = 3$ , штрихпунктирная –  $k_{\max} = 4$ .

Принимая в качестве критерия точности разложения максимальную по углу величину относительной погрешности и оценивая его величину в зависимости от параметров  $a$ ,  $b$ , и  $L$ , можно определить необходимое для учета в

разложении потенциала число слагаемых. Согласно рис. 3, чтобы добиться точности в приближенных расчетах  $\sim 0,01$  величины, достаточно учитывать в разложении (11) первые четыре слагаемых, то есть  $k_m = 4$ . Таким образом, внешний потенциал на поверхности сферы можно представить в виде конечной суммы:

$$\Phi_r(\vec{r})|_{r=1} = \sum_{k=0}^4 F_k \cdot P_k(\mu). \quad (13)$$

Из условия эквипотенциальности (10) находим коэффициенты  $B_k^{1/2}$  в разложении (9) в виде  $B_k^{1/2} = -F_k$ , и с учетом условия сохранения заряда (8) рассчитаем потенциал  $\Phi^{1/2}(\vec{r})$ :

$$\Phi^{1/2}(\vec{r}) = \Phi_r(\vec{r}) - \sum_{k=0}^{k_m} F_k \cdot r^{-(k+1)} \cdot P_k(\mu). \quad (14)$$

Распределение давления инерции на поверхности капли определяется из баланса давлений:

$$r = 1: P_{in}(\vec{r}) = -P_E^{1/2}(\vec{r}).$$

В расчетах принимается, что характерное время формирования равновесной формы поверхности капли (гидродинамическое время) значительно меньше времени существенного смещения центра масс заряженной капли под воздействием внешнего электрического поля (кинематического времени), то есть

$$\sqrt{\rho R^3 / \sigma} < \sqrt{\frac{R}{Q \cdot E_r \cdot m}},$$

где  $m$  – масса капли, что дает:

$$Q \cdot E_r < \rho^{-2} R^{-5} \sigma.$$

При выполнении этого условия будем полагать, что расстояние  $L$  от центра капли до торца стержня неизменно.

### ЗАДАЧА ПОРЯДКА $\varepsilon^1$

В первом порядке малости по  $\varepsilon$  получим следующую задачу:

$$r=1: P_E^1(\vec{r}) = P_\sigma^1(\vec{r}); \Delta\Phi^1(\vec{r}) = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \Phi^1(\vec{r}) \rightarrow 0;$$

$$\Phi^1(\vec{r}) \Big|_{r=1} = \text{const} - h(\theta) \cdot \partial_r \Phi^0(\vec{r}) \Big|_{r=1}; \quad (15)$$

$$\int_{-1}^1 h(\theta) d\mu = 0; \quad \int_{-1}^1 h(\theta) \mu d\mu = 0; \quad (16)$$

$$\int_{0-1}^{2\pi 1} \left( \partial_r \Phi^1(\vec{r}) + (2\partial_r \Phi^0(\vec{r}) + \Phi^0(\vec{r})) h(\theta) \right) \Big|_{r=1} d\varphi d\mu = 0; \quad (17)$$

$$P_E^1(\vec{r}) = \left( \partial_r \frac{(\nabla\Phi^0(\vec{r}))^2}{8\pi} h(\theta) + \frac{\nabla\Phi^0(\vec{r})\nabla\Phi^1(\vec{r})}{4\pi} + \frac{(\nabla\Phi^{1/2}(\vec{r}))^2}{8\pi} \right) \Big|_{r=1}; \quad (18)$$

$$P_\sigma^1(\theta) = - \left( 2h(\theta) + \frac{1}{\sin\theta} \partial_\theta (h(\theta) \sin\theta) \right). \quad (19)$$

Учет условий (16) позволяет уточнить нижнее значение индекса суммирования в выражении (3) для искажения  $h(\theta)$ :

$$r(\theta) \equiv 1 + h(\theta) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n P_n(\mu) \quad (20)$$

и записать (19) с учетом выражения (20) через амплитуды  $a_n$  в виде:

$$P_\sigma^1 = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n-1)(n+2) P_n(\mu). \quad (21)$$

Краевая задача для нахождения потенциала  $\Phi^1(\vec{r})$  решается аналогично рассмотренной выше: из уравнения Лапласа потенциал представим в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$\Phi^1(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^1 r^{-(k+1)} \cdot P_k(\mu). \quad (22)$$

Подставляя общий вид потенциала  $\Phi^1(\vec{r})$  (22) в условия (15) и (17) с учетом выражения (20) для искажения равновесной поверхности, определим коэффициенты  $B_k^1$  и получим выражение для потенциала  $\Phi^1(\vec{r})$  через амплитуды искажения  $a_n$ :

$$\Phi^1(\vec{r}) = \sum_{n=2}^{\infty} Q \cdot a_n r^{-(n+1)} \cdot P_n(\mu). \quad (23)$$

Полный потенциал электрического поля в окрестности капли в приближении до первого порядка по  $\varepsilon$  включительно примет вид:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} + \Phi_r(\vec{r}) - \sum_{k=0}^{k_m} F_k \cdot r^{-(k+1)} \cdot P_k(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} Q \cdot a_n \cdot r^{-(n+1)} P_n(\mu).$$

Электростатическое давление  $P_E^1(\vec{r})$  рассчитывается с учетом выражений (4), (5), (14), (23) по формуле (18). Отсутствие угловой зависимости в потенциале  $\Phi^0(\vec{r})$  (см. (4)) и условие эквипотенциальности поверхности капли (7) приводят к упрощенному выражению для давления  $P_E^1(\vec{r})$ :

$$r=1: P_E^1(\vec{r}) = \partial_r \frac{(\partial_r \Phi^0(\vec{r}))^2}{8\pi} h(\theta) + \frac{\partial_r \Phi^0(\vec{r}) \cdot \partial_r \Phi^1(\vec{r})}{4\pi} + \frac{1}{8\pi} (\partial_r \Phi^{1/2}(\vec{r}))^2. \quad (24)$$

В последнем слагаемом, которое может быть расписано в виде:

$$\frac{1}{8\pi} (\partial_r \Phi^{1/2}(\vec{r}))^2 \Big|_{r=1} = \frac{1}{8\pi} (\partial_r \Phi_d^{1/2}(\vec{r}) + \partial_r \Phi_r(\vec{r}))^2 \Big|_{r=1},$$

возникает необходимость представления нормальной компоненты напряженности внешнего электрического поля на поверхности сферы в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$\begin{aligned} \partial_r \Phi_r(\vec{r}) \Big|_{r=1} &= -(\vec{E}_r(\vec{r}), \vec{n}(\vec{r})) \Big|_{r=1} = \\ &= -E_{n,r}(\vec{r}) \Big|_{r=1} = \sum_{l=0}^{\infty} S_l \cdot P_l(\mu); \end{aligned} \quad (25)$$

$$S_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 \partial_r \Phi_r(\vec{r}) \Big|_{r=1} \cdot P_l(\mu) d\mu. \quad (26)$$

Так как аналитическое вычисление коэффициентов  $S_l$  затруднено ввиду громоздкости, то необходимо применить численные оценки и, следовательно, ограничить разложение (25) конечным числом полиномов:

$$\begin{aligned} E_{n,r}(\vec{r}) \Big|_{r=1} &= -\partial_r \Phi_r(\vec{r}) \Big|_{r=1} \approx \\ &\approx E_{n,ap}(\vec{r}) \Big|_{r=1} = -\sum_{l=0}^{l_m} S_l \cdot P_l(\mu), \end{aligned} \quad (27)$$

где  $E_{n,ap}(\vec{r})$  – приближенное значение напряженности поля.

Зависимости относительной погрешности  $\gamma = \left| \frac{E_{n,ap} - E_{n,r}}{E_{n,r}} \right| \Big|_{r=1}$  приближенного представления нормальной компоненты напряженности от угла  $\theta$  качественно аналогичны приведенным на рис. 2–3.

Расчеты показывают, что для достижения величины относительной погрешности  $\gamma < 0,01$  необходимо учесть  $l_m = 8$  полиномов в разложении (27). Эта величина превышает величину  $k_m = 4$ , полученную при оценке погрешности разложения (13). Поэтому в дальнейшем для

единообразия примем  $k_m = l_m = 8$ , при этом точность разложения (13) только повысится.

Используя (27), выражение (24) для давления электрического поля, с учетом выражений (4), (14), (23), приведем к виду:

$$P_E^1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{Q^2}{4\pi} \right) (n-1) a_n + \frac{1}{8\pi} \sum_{k=-m}^{k_m} \sum_{l=-m}^l (S_k - (k+1)F_k)(S_{n+m} - (n+m+1)F_{n+m}) U_{m,n+m,n} \right) P_n(\mu);$$

$$U_{a,b,c} = \left( C_{a,0,b,0}^{c,0} \right)^2; \quad (28)$$

где  $C_{l_1, m_1, l_2, m_2}^{l, m}$  – коэффициенты Клебша-Гордана [16], а  $F_k$  и  $S_k$  – численные коэффициенты, определяемые по формулам (12) и (26) с использованием (5).

Подставляя (28), (21) в условие баланса давлений, получим выражения для амплитуд  $a_n$  в разложении равновесной формы капли (20):

$$a_n = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{(n+2 - Q^2/4\pi)(n-1)} \times \quad (29)$$

$$\times \sum_{k=-m}^{k_m} \sum_{l=-m}^l (S_k - (k+1)F_k)(S_{n+m} - (n+m+1)F_{n+m}) U_{m,n+m,n}.$$

Амплитуды искажения  $a_n = 0$  при  $n \geq k_m$  и  $n < 2$ . С учетом этого равновесная форма поверхности капли  $r(\theta)$  (20) запишется в виде:

$$r(\theta) = 1 + \sum_{n=2}^{2k_m} a_n P_n(\mu). \quad (30)$$

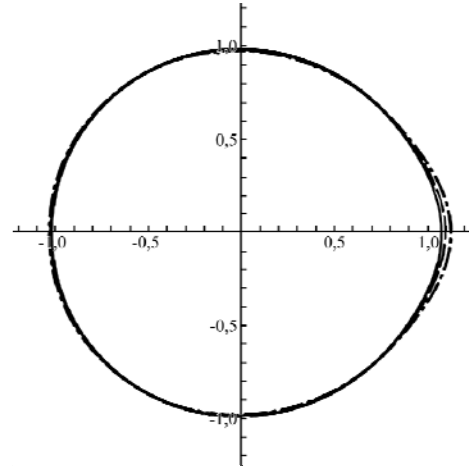
#### АНАЛИЗ РАВНОВЕСНЫХ ФОРМ

Перейдем к анализу равновесной формы капли. Диапазон возможных значений собственного заряда на поверхности устойчивой сферической заряженной капли определим на основании критерия Рэлея. Известно [2], что для устойчивости капли по отношению к собственному заряду необходимо, чтобы выполнялось условие  $Q^2/4\pi\sigma R^3 < 4$ . Это дает  $0 \leq |Q| < |Q_{cr}| \equiv 4\sqrt{\pi\sigma R^3}$  или в безразмерном виде –  $|Q_{cr}| = 4\sqrt{\pi}$ . Наличие внешнего электростатического поля, конечно, скажется на устойчивости капли [13–14, 17–18]. Но при построении равновесных форм капли, для примера, в качестве характерной величины будем использовать значение заряда  $Q = \frac{Q_{cr}}{2}$ .

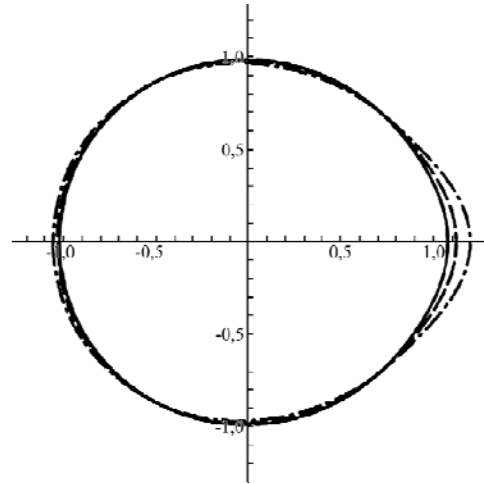
Величину потенциала стержня  $\phi_0$  (характеризующую величину внешнего неоднородного поля) в безразмерных переменных зададим максимально возможной (при принятых геометрических размерах стержня) так, чтобы оставаться

при этом в рамках предположения о малости искажения равновесной формы капли. Приняв, что  $\max|h(\theta)| \leq 0,2$ , для используемых в расчетах расстояний  $L$ , а также значений длины и толщины стержня (большой и малой полуосей сфероида  $a$  и  $b$ ) получим оценку на значение величины потенциала стержня  $\phi_0 \approx 9$ . При рассмотрении капли этанола радиусом  $R = 1$  мм с коэффициентом поверхностного натяжения, равным  $\sigma = 23$  дин/см, такая величина безразмерного потенциала соответствует размерному значению потенциала, равному 4,1 кВ.

На рис. 4 представлены равновесные формы капли в поле стержней разной толщины. Расчеты показывают, что при рассмотрении тонких  $b \leq R$  длинных стержней величина искажения с расширением стержня увеличивается.



**Рис. 4.** Равновесные формы капли в полях стержней разной толщины, рассчитанные при  $L = 2$ ,  $a = 30$ ,  $Q = Q_{cr}/2$ ,  $\phi_0 = 9$  (в размерных единицах  $\phi_0 = 4,1$  кВ для  $R = 1$  мм,  $\sigma = 23$  дин/см). Сплошная линия соответствует  $b = 0,3$ , пунктирная –  $b = 0,5$ , штрихпунктирная –  $b = 1$ .



**Рис. 5.** Равновесные формы капли в полях стержней разной длины, рассчитанные при  $L = 2$ ,  $b = 1$ ,  $Q = Q_{cr}/2$ ,  $\phi_0 = 9$  (в размерных единицах  $\phi_0 = 4,1$  кВ для  $R = 1$  мм,  $\sigma = 23$  дин/см). Сплошная линия соответствует  $a = 100$ , пунктирная –  $a = 30$ , штрихпунктирная –  $a = 10$ .

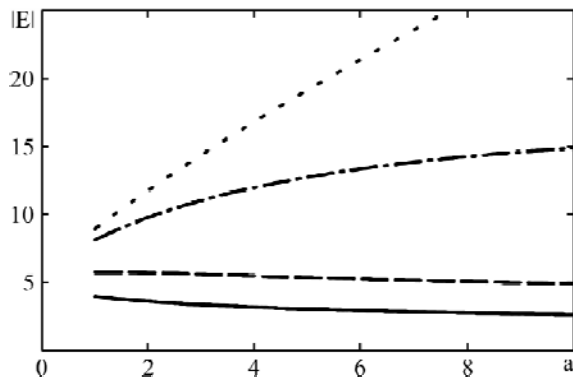
**Таблица 3.** Амплитуда мод искажения равновесной формы капли в поле стержней разной длины, рассчитанные при  $L = 2$ ,  $b = 1$ ,  $Q = Q_{cr}/2$ ,  $\varphi_0 = 9$  (в размерных единицах  $\varphi_0 = 4,1$  кВ для  $R = 1$  мм,  $\sigma = 23$  дин/см)

$a_k$	$a = 10$	$a = 30$	$a = 100$
$a_2$	$0,821 \times 10^{-1}$	$0,512 \times 10^{-1}$	$0,323 \times 10^{-1}$
$a_3$	$0,393 \times 10^{-1}$	$0,244 \times 10^{-1}$	$0,154 \times 10^{-1}$
$a_4$	$0,249 \times 10^{-1}$	$0,154 \times 10^{-1}$	$0,976 \times 10^{-2}$
$a_5$	$0,180 \times 10^{-1}$	$0,112 \times 10^{-1}$	$0,706 \times 10^{-2}$
$a_6$	$0,139 \times 10^{-1}$	$0,869 \times 10^{-2}$	$0,547 \times 10^{-2}$
$a_7$	$0,109 \times 10^{-1}$	$0,680 \times 10^{-2}$	$0,429 \times 10^{-2}$
$a_8$	$0,479 \times 10^{-2}$	$0,298 \times 10^{-2}$	$0,187 \times 10^{-2}$
$a_9$	$0,391 \times 10^{-2}$	$0,244 \times 10^{-2}$	$0,154 \times 10^{-2}$
$a_{10}$	$0,341 \times 10^{-3}$	$0,199 \times 10^{-3}$	$0,122 \times 10^{-3}$
$a_{11}$	$0,418 \times 10^{-4}$	$0,249 \times 10^{-4}$	$0,154 \times 10^{-4}$
$a_{12}$	$0,611 \times 10^{-5}$	$0,376 \times 10^{-5}$	$0,236 \times 10^{-5}$
$a_{13}$	$0,990 \times 10^{-6}$	$0,630 \times 10^{-6}$	$0,400 \times 10^{-6}$
$a_{14}$	$0,170 \times 10^{-6}$	$0,112 \times 10^{-6}$	$0,716 \times 10^{-7}$
$a_{15}$	$0,292 \times 10^{-7}$	$0,197 \times 10^{-7}$	$0,128 \times 10^{-7}$
$a_{16}$	$0,450 \times 10^{-8}$	$0,313 \times 10^{-8}$	$0,205 \times 10^{-8}$

**Таблица 4.** Амплитуды мод искажения равновесной формы капли в поле стержней разной длины, рассчитанные при  $L = 5$ ,  $b = 1$ ,  $Q = Q_{cr}/2$ ,  $\varphi_0 = 9$  (в размерных единицах  $\varphi_0 = 4,1$  кВ для  $R = 1$  мм,  $\sigma = 23$  дин/см)

$a_k$	$a = 10$	$a = 30$	$a = 100$
$a_2$	$0,948 \times 10^{-2}$	$0,685 \times 10^{-2}$	$0,459 \times 10^{-2}$
$a_3$	$0,440 \times 10^{-2}$	$0,317 \times 10^{-2}$	$0,211 \times 10^{-2}$
$a_4$	$0,279 \times 10^{-2}$	$0,201 \times 10^{-2}$	$0,135 \times 10^{-2}$
$a_5$	$0,203 \times 10^{-2}$	$0,146 \times 10^{-2}$	$0,978 \times 10^{-3}$
$a_6$	$0,158 \times 10^{-2}$	$0,114 \times 10^{-2}$	$0,765 \times 10^{-3}$
$a_7$	$0,128 \times 10^{-2}$	$0,929 \times 10^{-3}$	$0,622 \times 10^{-3}$
$a_8$	$0,530 \times 10^{-3}$	$0,382 \times 10^{-3}$	$0,255 \times 10^{-3}$
$a_9$	$0,454 \times 10^{-3}$	$0,328 \times 10^{-3}$	$0,220 \times 10^{-3}$
$a_{10}$	$0,756 \times 10^{-5}$	$0,445 \times 10^{-5}$	$0,271 \times 10^{-5}$
$a_{11}$	$0,156 \times 10^{-6}$	$0,879 \times 10^{-7}$	$0,533 \times 10^{-7}$
$a_{12}$	$0,372 \times 10^{-8}$	$0,211 \times 10^{-8}$	$0,128 \times 10^{-8}$
$a_{13}$	$0,984 \times 10^{-10}$	$0,563 \times 10^{-10}$	$0,344 \times 10^{-10}$
$a_{14}$	$0,278 \times 10^{-11}$	$0,161 \times 10^{-11}$	$0,990 \times 10^{-12}$
$a_{15}$	$0,825 \times 10^{-13}$	$0,484 \times 10^{-13}$	$0,299 \times 10^{-13}$
$a_{16}$	$0,245 \times 10^{-14}$	$0,146 \times 10^{-14}$	$0,903 \times 10^{-15}$

На рис. 5 построены равновесные формы поверхности капли в поле стержней разной длины. Отметим, что общая величина искажения уменьшается с увеличением длины стержня.



**Рис. 6.** Зависимости величины напряженности электростатического поля вблизи конца стержня от его длины, рассчитанные при  $b = 1$ ,  $\varphi_0 = 9$  (в размерных единицах  $\varphi_0 = 4,1$  кВ для  $R = 1$  мм,  $\sigma = 23$  дин/см). Сплошная линия соответствует  $H = 0,5$ , пунктирная –  $H = 0,25$ , штрихпунктирная –  $H = 0,05$ , точечная –  $H = 0$ .

Для того чтобы объяснить эту тенденцию, на рис. 6 представлены зависимости величины напряженности поля стержня на расстоянии  $H$  от его конца от длины стержня  $a$ , рассчитанные по точному выражению потенциала (5). Видно, что при значениях  $H$  порядка или больших  $b$  более длинным стержням соответствуют меньшие значения напряженности поля на заданном расстоянии  $H$ . Казалось бы, естественно ожидать, что поскольку с увеличением длины сфероид (которым моделируется стержень) его емкость увеличивается, то поддержание постоянным потенциала стержня влечет за собой увеличение находящегося на нем заряда и, как следствие, рост напряженности создаваемого им поля. Однако данное утверждение справедливо только для области вблизи конца сфероид, которую приближенно можно описать соотношением  $H \ll b$ . В области же  $H \geq b$  наблюдается обратная тенденция, что является следствием перерас-



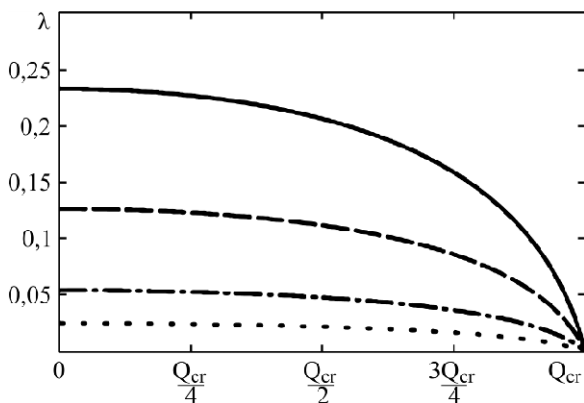
пределения собственного заряда стержня при его удлинении.

В табл. 3 и 4 приведены величины коэффициентов  $a_n$  в разложении (30). Несложно заметить, что  $a_n$  монотонно убывает с ростом номера моды, а при сравнении данных из табл. 3 и 4 следует, что скорость убывания растет с увеличением  $H$ . Таким образом, если задаться определенной степенью точности для описания равновесной формы капли, то можно уменьшить количество слагаемых в сумме (30), ограничив ее учетом полиномов до порядка  $p < 2k_m$  включительно.

Оценим, при каких значениях зарядов капли это возможно. Для этого введем параметр, характеризующий отношение суммы амплитуд отбрасываемых мод к аналогичной сумме для учтенных мод:

$$\lambda(p) = \frac{\sum_{n=p+1}^{2k_m} |a_n|}{\sum_{n=2}^p |a_n|}.$$

На рис. 7 представлены зависимости величины  $\lambda$  от заряда на капле при разном количестве  $p$  учтенных полиномов в разложении (30). Видно, что для описания равновесной формы с некоторой заданной точностью ограничить количество учитываемых полиномов значением  $p < 2k_m$  возможно (напомним, что выше принято  $k_m = 8$ ). К примеру, при требовании описания равновесной формы поверхности капли с точностью  $\leq 5\%$  для приведенных на рис. 7 параметров стержня можно ограничиться в выражении (30) учетом слагаемых до  $P_8(\cos\theta)$  включительно.



**Рис. 7.** Зависимости параметра  $\lambda$  от величины заряда на капле при разном количестве  $p$  учтенных полиномов в разложении равновесной формы капли, рассчитанные при  $L = 2$ ,  $a = 10$ ,  $b = 1$ ,  $\varphi_0 = 9$  (в размерных единицах  $\varphi_0 = 4,1$  кВ для  $R = 1$  мм,  $\sigma = 23$  дин/см). Сплошная линия соответствует  $p = 5$ , пунктирная —  $p = 6$ , штрихпунктирная —  $p = 7$ , точечная —  $p = 8$ .

Расчеты показывают, что в неоднородном поле стержня вклад в равновесную форму капли двух-трех первых мод существенно превышает вклад всех остальных мод только при зарядах

капли, близких к критическому значению. Однако этот случай выходит за рамки применимости выполненного расчета, так как при таких значениях заряда становится несправедливым предположение о малости величины искажения  $\varepsilon \equiv \max |h(\theta)|$ . Если рассмотреть зависимости  $\varepsilon$  от величины заряда на капле, то получим, что область применения решений (29)–(30) для принятых в расчетах значений параметров системы ограничена величиной собственного заряда капли:  $|Q| < \frac{3}{4} |Q_{cr}|$ .

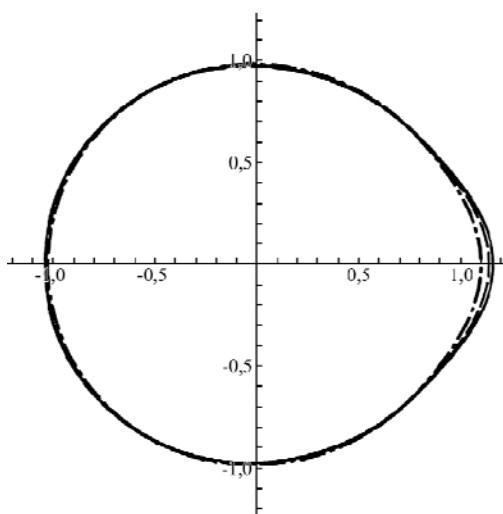
Таким образом, можно заключить, что равновесную форму поверхности проводящей капли идеальной жидкости в неоднородном электростатическом поле стержня можно приближенно описывать суперпозицией нескольких первых полиномов Лежандра (число которых зависит от требуемой точности описания) с амплитудами, определяемыми выражением (29).

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В работе [6] экспериментально наблюдался распад капель этанола в неоднородном электростатическом поле тонкой коронирующей иглы и плоского противозэлектрода. Изначально незаряженная капля падала сквозь облако ионов, создаваемое коронным разрядом, с острия иглы, заряжалась в нем и претерпевала электростатическую неустойчивость. Неустойчивая капля выбрасывала распадающуюся на отдельные капельки струю жидкости длиной много больше диаметра капли. Можно было наблюдать реализацию типичных неустойчивостей нескольких первых мод осцилляций поверхности струи. В частности, наблюдались осесимметричный, хлыстообразный и электростатический [19–21] режимы распада струи [22–23]. Любопытно, что струя выбрасывалась не в сторону максимальной неоднородности поля – к стержню, а в противоположную – к плоскому противозэлектроду.

В экспериментах [6] заряд капли не контролировался, но по условиям эксперимента мог достигать величин порядка сотых долей от критического по Рэлею [2]. Неоднородное электростатическое поле создавалось иглой диаметром  $d \approx 0,57$  мм и длиной порядка 10 см. Расстояние от конца иглы до пролетающей капли диаметром  $d \approx 2$  мм составляло 10 мм. Потенциал, подводимый к игле, менялся от 33 кВ до 41 кВ. В безразмерных переменных, используемых в данной работе, параметры эксперимента имеют следующие величины:  $\varphi_0 = 72,5$ – $90,1$ ,  $a = 50$ ,  $b = 0,29$ . Равновесная форма незаряжен-

ной капли в таком поле, согласно рассматриваемой модели, имеет вид яйцевидно искаженной сферы (рис. 8).



**Рис. 8.** Равновесные формы поверхности капли, рассчитанные при  $L = 10$ ,  $b = 0,29$ ,  $a = 50$ ,  $Q = 0$  (в размерных единицах  $\varphi_0 = 33$  кВ, 39 кВ, 41 кВ соответственно для  $R = 1$  мм,  $\sigma = 23$  дин/см). Сплошная линия соответствует  $\varphi_0 = 72,5$ , пунктирная –  $\varphi_0 = 85,7$ , штрихпунктирная –  $\varphi_0 = 90,1$ .

Такой результат качественно согласуется с приведенными в [6] фотографиями. Но из тех же фотографий следует и то, что капля имеет собственный не скомпенсированный заряд, одной полярности с игольчатым электродом. Из экспериментов [6] видно, что струи, выбрасываемые из капли при электростатической неустойчивости, летят не в сторону наиболее неоднородного электростатического поля (к стержню), как должно быть из общефизических соображений, а в противоположную сторону, в область слабого поля. Это значит, что на половинке капли, обращенной к стержню, индуцированный полем заряд противоположен по знаку собственному заряду капли, а на противоположной половине – одноименен. Неустойчивость реализуется там, где поверхностная плотность суммарного заряда максимальна. В результате там формируются эмиссионный выступ и струя.

Следует отметить важное отличие. В данном расчете рассматриваются равновесные капли, а в [6] – капли заведомо неустойчивые: напряженность электростатического поля в [6] критична для реализации электростатической неустойчивости как капли, так и выбрасываемой ею струи [14, 19–20, 22–23].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выяснилось, что учет толщины стержня, служащего электродом, создающим потенциал в месте, где находится заряженная капля, приводит к заметному искажению ее равновесной формы.

Искажение равновесной сферической формы поверхности проводящей заряженной капли идеальной жидкости в неоднородном электростатическом поле стержня описывается суперпозицией нескольких первых полиномов Лежандра с амплитудами, описываемыми выведенными в данной работе выражениями.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00170 и 14-08-00240.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Won-Kyu Rhim, Ishikawa T. *Rev Sci Instr.* 2001, **72**(9), 3572–3575.
2. Rayleigh (Strutt J.W.) *Phil Mag.* 1882, **14**, 184–186.
3. Duft D., Achtzehn T., Muller R. et al. *Nature.* 2003, **421**, 128.
4. Grimm R.L., Beauchamp J.L. *J Phys Chem B.* 2005, **109**, 8244–8250.
5. Fong Chee Sheng, Black N.D., Kiefer P.A., Shaw R.A. *Am J Phys.* 2007, **75**(6), 499–503.
6. Kim O.V., Dunn P.F. *Langmuir.* 2010, **26**, 15807–15813.
7. Wagner A., Venkatesan T., Petroff P.M., Barr D. *J Vac Sci Technol.* 1981, **19**(4), 1186–1189.
8. Ширяева С.О., Григорьев А.И. *ЖТФ.* 1993, **63**(8), 162–170.
9. Григорьев А.И., Жаров А.Н., Ширяева С.О. *ЖТФ.* 2005, **75**(8), 44–53.
10. Григорьев А.И., Ширяев А.А., Ширяева С.О. *Известия РАН. МЖГ.* 2016, (2), 56–64.
11. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. *Сборник задач по электродинамике.* М: Наука, 1970. 503 с.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред.* М.: Наука, 1982. 621 с.
13. Baily A.G. *Sci Prog Oxford.* 1974, **61**, 555–581.
14. Бураев Т.К., Верещагин И.П., Пашин Н.М. *Сильные электрические поля в технологических процессах.* М.: Энергия. 1979, (3), 87–105.
15. Григорьев А.И., Ширяева С.О. *Известия РАН. МЖГ.* 1994, (3), 3–22.
16. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. *Квантовая теория углового момента.* Л.: Наука, 1975. 436 с.
17. Taylor G.I. *Proc Roy Soc London.* 1964, **A280**, 383–397.
18. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Ширяев А.А. *ЖТФ.* 2015, **85**(1), 31–38.
19. Cloupeau M., Prunet Foch V. *J Electrostatics.* 1990, **25**, 165–184.
20. Jaworek A., Krupa A. *J Aerosol Sci.* 1999, **30**(7), 873–893.
21. Левич В.Г. *Физико-химическая гидродинамика.* М.: Физматлит, 1959. 699 с.
22. Ширяева С.О. *ЖТФ.* 2010, **80**(4), 24–32.
23. Ширяева С.О. *ЖТФ.* 2011, **81**(6), 36–41.

Поступила 04.07.16  
После доработки 24.08.16

### Summary

In asymptotic calculations, the equilibrium form of a charged drop is found in a non-uniform electrostatic field created by an extended spheroid modeling a rod supported at a constant electric potential. It was found that the size of a small axis of a spheroid (rod thickness) creating a field considerably affects an equilibrium form of the charged drop. It is possible to describe the distortion of a

spherical form of the surface of the charged conducting drop of ideal incompressible liquid in a non-uniform electrostatic field of a rod (with an accuracy bigger one percent of size) by the superposition of the excited second and third modes.

*Keywords: drop, charge, electrostatic field, rod creating the field, modeled by extended spheroid.*