

ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В РАМКАХ ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия*

Введение. Аналитические исследования нелинейных волн на плоской и цилиндрической заряженной поверхности вязкой жидкости, а также нелинейных осцилляций заряженных капель вязкой жидкости представляют интерес в связи с многочисленными приложениями в технике и технологии [1–7]. Как показали выполненные в последние годы аналитические расчеты нелинейных осцилляций заряженной капли вязкой жидкости [5–8] и сама процедура аналитического расчета, полученные в итоге результаты весьма громоздки для успешного использования. Поэтому представляется целесообразным упростить процедуру расчета подобных задач, используя представления теории пограничного слоя, связанного с периодически движущейся свободной поверхностью жидкости [9], и попытаться получить менее громоздкие финальные выражения, сохраняющие тем не менее основную информацию, содержащуюся в точном решении.

Следует подчеркнуть, что в [9] теория пограничного слоя, связанного с периодически движущейся свободной поверхностью жидкости, очерчена весьма схематично, поэтому в настоящем рассмотрении результаты, полученные при расчетах в рамках модели пограничного слоя, будут сравниваться с аналогичными результатами, полученными в точном асимптотическом расчете [10].

Формулировка задачи расчета линейных осцилляций заряженной капли вязкой жидкости. Пусть имеется сферическая капля идеально проводящей несжимаемой вязкой электропроводной жидкости радиуса r_0 с массовой плотностью ρ , коэффициентами кинематической вязкости ν и поверхностного натяжения σ , имеющая электрический заряд Q , совершающая осесимметричные осцилляции. Зададимся целью исследовать аналитическим путем в линейном приближении по амплитуде начальной деформации временную эволюцию осцилляций. Все обследование проведем в сферической системе координат r, ϑ, φ с началом в центре масс невозмущенной сферической капли. Поле скоростей течения жидкости в капле, связанное с ее осцилляциями, обозначим $\vec{U}(r, \vartheta, t)$, возникающее при этом поле давлений $p(r, \vartheta, t)$, связанное с движением жидкости, потенциалы электрического поля в окрестности капли и на ее поверхности обозначим $\phi(r, \vartheta, t)$ и $\phi_s(t)$ соответственно. Уравнение свободной поверхности осциллирующей капли запишем в виде

$$F(r, \vartheta, t) \equiv r - r_0 - \xi(\vartheta, t) = 0. \quad (1)$$

Начальную деформацию капли зададим в виде суперпозиции осесимметричных мод:

$$t = 0: \quad \xi(\vartheta) \equiv \sum_{n \in \Xi} h_n \cdot P_n(\mu); \quad \sum_{n \in \Xi} \frac{h_n}{r_0} = \varepsilon; \quad \mu \equiv \cos \vartheta; \quad (2)$$

где ε – малый параметр, характеризующий амплитуду начальной деформации; h_n – константа, определяющая парциальный вклад отдельной моды колебаний в форму начальной деформации; $P_n(\mu)$ – полином Лежандра; Ξ – множество номеров мод, суперпозиция которых определяет начальную деформацию капли.

Отметим, что в безразмерных переменных, в которых за основные единицы приняты коэффициент поверхностного натяжения, радиус капли и плотность жидкости, поле скоростей течения жидкости в капле, связанное с ее осцилляциями $\vec{U}(r, \vartheta, t)$, и возникающее при осцилляциях поле давлений $p(r, \vartheta, t)$, являются величинами первого порядка малости по амплитуде начальной деформации ε .

Математическая формулировка задачи о расчете осесимметричных капиллярных осцилляций заряженной капли вязкой жидкости, форма которой в начальный момент времени определяется (1)–(2), в линейном по ε приближении имеет вид [10]:

$$\operatorname{div} \vec{U} = 0; \quad (3)$$

$$\partial_t \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \cdot \Delta \vec{U}; \quad (4)$$

$$r \rightarrow 0: \vec{U} \rightarrow 0; \quad t = 0: \vec{U} = 0; \quad (5)$$

$$\Delta \phi = 0; \quad (6)$$

$$r \rightarrow +\infty: \nabla \phi \rightarrow 0; \quad r = r_0 + \xi(\vartheta, t): \phi = \phi_s(t); \quad (7)$$

$$\int_S \vec{n} \cdot \nabla \phi dS = -4\pi Q; \quad S = \{r, \vartheta, \varphi | r = r_0 + \xi; 0 \leq \vartheta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}; \quad (8)$$

$$r = r_0 + \xi(\vartheta, t): \partial_t F + (\vec{U} \cdot \nabla) F = 0; \quad (9)$$

$$\vec{\tau} \cdot (\vec{n} \cdot \nabla) \vec{U} + \vec{n} \cdot (\vec{\tau} \cdot \nabla) \vec{U} = 0; \quad \vec{\tau} \cdot (\vec{n} \cdot \nabla) \vec{U} + \vec{n} \cdot (\vec{\tau} \cdot \nabla) \vec{U} = 0; \quad (10)$$

$$-p + 2\rho \nu \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \nabla) \vec{U} - \frac{1}{8\pi} (\nabla \phi)^2 + \sigma \cdot \operatorname{div} \vec{n} = 0; \quad (11)$$

$$\int_V r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi}{3} r_0^3;$$

$$V = \{r, \vartheta, \varphi | 0 \leq r \leq r_0 + \xi; 0 \leq \vartheta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \quad (12)$$

$$\int_V \vec{r} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = 0. \quad (13)$$

Символ ∂_t означает частную производную по переменной t ; $\vec{\tau}$ и \vec{n} – орты касательной и внешней нормали к свободной поверхности капли, определяемой соотношением (1).

Точное решение этой задачи для n -й моды осцилляций, принимавшей участие в формировании начальной деформации капли, найденное в линейном приближении, имеет вид [10]:

$$\begin{aligned} \xi_n(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} h_n a_{\xi_n}(S_n^{(k)}) \exp(S_n^{(k)} t); \\ U_m(r, t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} h_n \left(a_n(S_n^{(k)}) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-1} + b_n(S_n^{(k)}) \frac{1}{r} \frac{j_n(\chi_n^{(k)} r)}{j_n(\chi_n^{(k)} r_0)} \right) \exp(S_n^{(k)} t); \\ U_{\vartheta n}(r, t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} h_n \left[a_n(S_n^{(k)}) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-1} + \right. \\ &\quad \left. + b_n(S_n^{(k)}) \left(\frac{1}{r} \frac{j_n(\chi_n^{(k)} r)}{j_n(\chi_n^{(k)} r_0)} + \frac{\chi_n^{(k)} r_0}{n+1} \frac{j_{n+1}(\chi_n^{(k)} r)}{j_n(\chi_n^{(k)} r_0)} \right) \right] \frac{\exp(S_n^{(k)} t)}{n}; \\ p_n^{(1)}(r, t) &= -\rho r_0 h_n \sum_{k=1}^{+\infty} a_n(S_n^{(k)}) S_n^{(k)} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \frac{\exp(S_n^{(k)} t)}{n}; \\ a_{\xi_n}(S_n^{(k)}) &= \left[S_n^{(k)} + 2(n-1)(2n+1) \frac{\nu}{r_0^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2(n-1)^2 (n+1) \frac{\nu}{r_0^2} \left(1 - \frac{\chi_n^{(k)} r_0}{2} \frac{j_n(\chi_n^{(k)} r_0)}{j_{n+1}(\chi_n^{(k)} r_0)} \right)^{-1} \right] \frac{1}{\partial_{S_n^{(k)}} D_n(S_n^{(k)})}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
a_n(S_n^{(k)}) &= \left(\left(2(n^2 - 1) + \frac{r_0^2 S_n^{(k)}}{\nu} \right) \frac{1}{2\chi_n^{(k)} r_0} \frac{j_n(\chi_n^{(k)} r_0)}{j_{n+1}(\chi_n^{(k)} r_0)} - 1 \right) \times \\
&\quad \times \left(1 - \frac{\chi_n^{(k)} r_0}{2} \frac{j_n(\chi_n^{(k)} r_0)}{j_{n+1}(\chi_n^{(k)} r_0)} \right)^{-1} \frac{\omega_n^2}{\partial_{S_n^{(k)}} D_n(S_n^{(k)})}; \\
b_n(S_n^{(k)}) &= 2(n^2 - 1) \left(1 - \frac{2}{\chi_n^{(k)} r_0} \frac{j_{n+1}(\chi_n^{(k)} r_0)}{j_n(\chi_n^{(k)} r_0)} \right)^{-1} \frac{\omega_n^2 \nu}{r_0 S_n^{(k)} \partial_{S_n^{(k)}} D_n(S_n^{(k)})}; \\
D_n(S_n^{(k)}) &= (S_n^{(k)})^2 + 2(n-1)(2n+1) \frac{S_n^{(k)} \nu}{r_0^2} + \\
&\quad + 2(n-1)^2 (n+1) \frac{S_n^{(k)} \nu}{r_0^2} \left(1 - \frac{\chi_n^{(k)} r_0}{2} \frac{j_n(\chi_n^{(k)} r_0)}{j_{n+1}(\chi_n^{(k)} r_0)} \right)^{-1} + \omega_n^2; \quad \chi_n^{(k)} \equiv \sqrt{S_n^{(k)} / \nu},
\end{aligned}$$

где $S_n^{(k)}$ – k -й корень дисперсионного уравнения $D_n(S_n^{(k)}) = 0$, а $j_n(\chi_n^{(k)} r)$ – модифицированная сферическая функция Бесселя первого рода [11]. Попробуем теперь сформулировать эту же задачу в рамках представлений о пограничном слое и посмотреть, насколько существенно упростится решение и какова будет его погрешность по сравнению с точным решением.

Упрощение задачи в рамках теории пограничного слоя. Хорошо известно [6–7, 12–13], что поле скоростей течения вязкой жидкости как в плоской, так и в цилиндрической, и сферической геометрии (для волн на плоской поверхности жидкости, на поверхности струи и на поверхности сферической капли) может быть представлено в виде суммы потенциальной и вихревой компонент:

$$\vec{U}(r, \vartheta, t) = \vec{U}^{(p)}(r, \vartheta, t) + \vec{U}^{(c)}(r, \vartheta, t); \quad p(r, \vartheta, t) \equiv p^{(p)}(r, \vartheta, t); \quad (15)$$

где индекс (p) соответствует потенциальному движению, а (c) – вихревому. При записи выражения для давления в жидкости учитывалось, что согласно [6–7, 13] в расчетах первого порядка малости давление в жидкости целиком определяется потенциальной компонентой поля скоростей. Именно такое разделение поля скоростей на потенциальную и вихревую части использовалось в [10] при отыскании точного решения (14). Теорию пограничного слоя, связанного с периодическим движением свободной поверхности жидкости, будем формулировать, не затрагивая уравнений, описывающих потенциальную часть решения, не зависящую от вязкости жидкости, и упрощая ту часть задачи, которая описывает вихревое движение жидкости.

Подставляя (15) в уравнение неразрывности (3) и линейризованное уравнение Навье-Стокса (4), получаем уравнения, описывающие потенциальное движение:

$$\operatorname{div} \vec{U}^{(p)} = 0; \quad \partial_t \vec{U}^{(p)} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p^{(p)}; \quad (16)$$

и уравнения для вихревой компоненты поля скоростей (которые выпишем в скалярном виде):

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \cdot U_r^{(c)}) + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \partial_\vartheta (\sin(\vartheta) \cdot U_\vartheta^{(c)}) = 0; \quad (17)$$

$$\partial_t U_r^{(c)} = \frac{\nu}{r \sin(\vartheta)} \partial_\vartheta \left(\sin(\vartheta) \left(\frac{1}{r} \partial_\vartheta U_r^{(c)} - \partial_r U_\vartheta^{(c)} - \frac{1}{r} U_\vartheta^{(c)} \right) \right); \quad (18)$$

$$\partial_t U_\vartheta^{(c)} = \nu \left(\partial_r U_\vartheta^{(c)} + \frac{2}{r} \partial_r U_\vartheta^{(c)} - \frac{1}{r} \partial_{r\vartheta} U_r^{(c)} \right). \quad (19)$$

Несложно видеть, что в системе трех уравнений (17)–(19) определению подлежат лишь две неизвестные величины: $U_r^{(c)}$ и $U_\vartheta^{(c)}$. Сказанное означает, что из уравнений (17)–(19) одно должно быть отброшено. Для разрешения этой проблемы и получения приближенных уравнений, описывающих вихревые компоненты поля скоростей внутри пограничного слоя, оценим отдельные слагаемые,

входящие в уравнения (17)–(19). Для этого учтем, что вихревые составляющие поля скоростей как функции координаты r должны заметно меняться на характерном линейном масштабе, равном толщине пограничного слоя δ , а как функции от полярного угла ϑ должны заметно меняться на характерном угловом масштабе, равном π . Следовательно, при оценке отдельных вихревых слагаемых производные по радиальной и по угловой переменным будем оценивать на основе соотношений $\partial_r \rightarrow 1/\delta$, $\partial_\vartheta \rightarrow 1/\pi$.

Проводя эту оценку и учитывая, что указывается решение для маловязкой жидкости, получаем, что в асимптотике малой вязкости уравнение (18) должно быть отброшено, а в уравнении (19) оставлены лишь два слагаемых, величина которых растет при $\nu \rightarrow 0$:

$$\partial_t U_\vartheta^{(c)} = \nu \cdot \partial_{rr} U_\vartheta^{(c)}. \quad (20)$$

Уравнения (17), (20) и дают нам искомую систему уравнений пограничного слоя в окрестности осциллирующей свободной поверхности капли вязкой жидкости.

В итоге получаем, что система уравнений, описывающая динамику заряженной капли маловязкой жидкости, содержит в себе уравнения (16), (17), (20), а также граничные и начальные условия (2), (5) и (9)–(13). Кинематическое и динамические условия для касательных и нормальных компонент тензора напряжений (10)–(11), а также условие постоянства объема (12) и условие неподвижности центра масс (13) оставляем неизменными. Электростатическую задачу (6)–(7) с условием постоянства заряда (8), на основе которых рассчитывается давление электрического поля на поверхность капли, модификации также не подвергаем. Несложно видеть, что с учетом упрощений, допускаемых в рамках модели пограничного слоя, исходная задача расчета линейных осцилляций заряженной капли вязкой жидкости заметно упростилась. Не останавливаясь на процедуре отыскания решения, стандартной для задач данного вида и подробно описанной в [6–7, 10, 12–14], сразу выпишем готовое решение упрощенной в рамках представлений о пограничном слое задачи для n -й моды осцилляций, принимавшей участие в формировании начальной деформации капли:

$$\begin{aligned} \xi_n(t) &= h_n \left(\cos(\varpi_n t) + \frac{\gamma_n}{\varpi_n} \sin(\varpi_n t) \right) \exp(-\gamma_n t); \\ p_n^{(p)}(r, t) &= \rho \omega_n^2 h_n r_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \frac{\exp(-\gamma_n t)}{n} \left(\cos(\varpi_n t) + \frac{(n-1)\nu}{\varpi_n r_0^2} \sin(\varpi_n t) \right); \\ U_m^{(p)}(r, t) &= -h_n \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-1} \left(\frac{\omega_n^2}{\varpi_n} \sin(\varpi_n t) - 2(n^2-1) \frac{\nu}{r_0^2} \cos(\varpi_n t) \right) \exp(-\gamma_n t); \\ U_{\vartheta n}^{(p)}(r, t) &= -\frac{h_n}{n} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-1} \left(\frac{\omega_n^2}{\varpi_n} \sin(\varpi_n t) - 2(n^2-1) \frac{\nu}{r_0^2} \cos(\varpi_n t) \right) \exp(-\gamma_n t); \\ U_{\vartheta n}^{(c)}(r, t) &= \frac{(n-1) i h_n \omega_n^2}{n \varpi_n} \left[\frac{\eta_n^{(-)}}{\chi_n^{(-)} r_0} \frac{\text{sh}(\chi_n^{(-)} r)}{\text{ch}(\chi_n^{(-)} r_0)} \exp(-i\varpi_n t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\eta_n^{(+)}}{\chi_n^{(+)} r_0} \frac{\text{sh}(\chi_n^{(+)} r)}{\text{ch}(\chi_n^{(+)} r_0)} \exp(i\varpi_n t) \right] \exp(-\gamma_n t); \\ U_m^{(c)}(r, t) &= (n^2-1) \frac{\omega_n^2 i h_n}{\varpi_n r_0} \left[\left(\text{ch}(\chi_n^{(-)} r) - \frac{\text{sh}(\chi_n^{(-)} r)}{\chi_n^{(-)} r} \right) \frac{\exp(-i\varpi_n t)}{(\chi_n^{(-)})^2 \text{ch}(\chi_n^{(-)} r_0)} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\text{ch}(\chi_n^{(+)} r) - \frac{\text{sh}(\chi_n^{(+)} r)}{\chi_n^{(+)} r} \right) \frac{\exp(i\varpi_n t)}{(\chi_n^{(+)})^2 \text{ch}(\chi_n^{(+)} r_0)} \right] \exp(-\gamma_n t); \\ \chi_n^{(-)} &= \sqrt{\frac{-i\varpi_n - \gamma_n}{\nu}}; \quad \chi_n^{(+)} = \sqrt{\frac{i\varpi_n - \gamma_n}{\nu}}; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\eta_n^{(-)} = 1 + \frac{\text{th}(\chi_n^{(-)} r_0)}{\chi_n^{(-)} r_0}; \quad \eta_n^{(+)} = 1 + \frac{\text{th}(\chi_n^{(+)} r_0)}{\chi_n^{(+)} r_0};$$

$$D_n(S) = S^2 + 2(n-1)(2n+1) \frac{\nu S}{r_0^2} + \omega_n^2 + O(\nu^{3/2});$$

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho r_0^3} n(n-1)(n+2-W); \quad W = \frac{Q^2}{4\pi\sigma r_0^3}.$$

Из сравнения (14) с (21) несложно видеть, что решение, найденное в рамках теории пограничного слоя, записывается существенно более просто и, как следствие, более удобно для последующего анализа (по крайней мере, оно не содержит модифицированных сферических цилиндрических функций [11]).

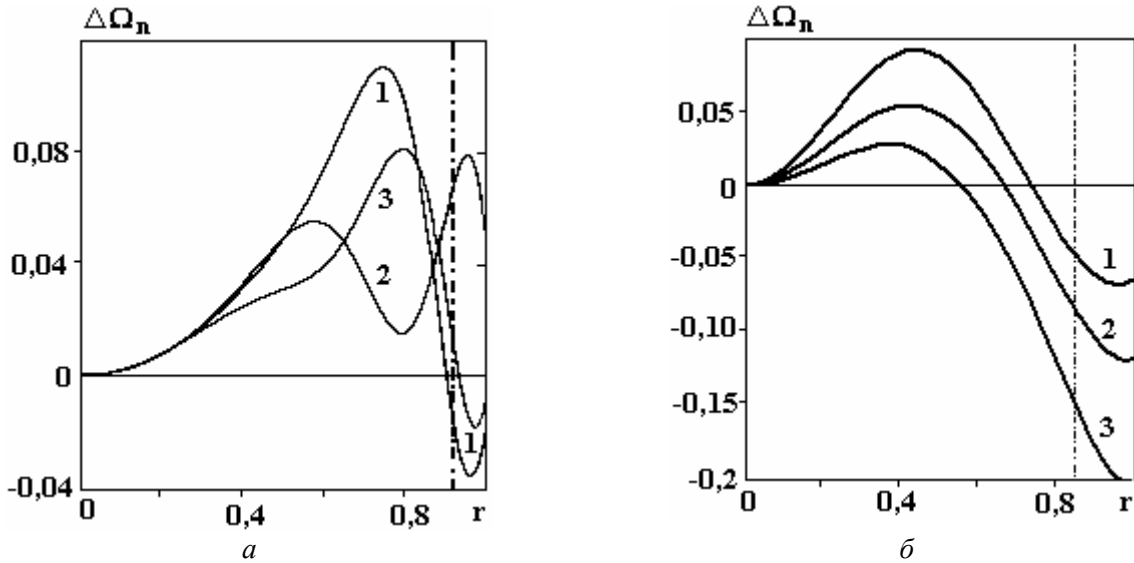


Рис. 1. Зависимости от радиальной переменной r разности между (23) и (24) – точным и приближенным выражениями для вихря скорости $\Delta\Omega_n$, построенные в безразмерных переменных, в которых $\rho = \sigma = r_0 = 1$, при $n = 2$, $\nu = 0,01$, $t = 4$ (кривая 1), $t = 5$ (кривая 2), $t = 6$ (кривая 3). Вертикальная штрихпунктирная линия указывает толщину пограничного слоя, определенную выражением (22). а) $W = 0$; б) $W = 4,1$

Требую, чтобы амплитуда вихревого движения затухала в глубь капли, уменьшая свою амплитуду в $e \cong 2,718$ раза на характерном линейном масштабе порядка толщины пограничного слоя δ , свяжем характеристики толщины пограничного слоя с физическими характеристиками задачи в виде следующих соотношений:

$$\delta = \begin{cases} \sqrt{2\nu / (\omega_n - \gamma_n)}, & 0 \leq W < W_*; \\ \sqrt{\nu / (|\omega_n| - \gamma_n)}, & W > W_{cr} = n + 2. \end{cases} \quad (22)$$

Значение параметра Рэлея $W = W_*$ разделяет периодические и аperiodические движения жидкости в капле [15]. Известно (см., например, [15]), что в зависимости от номера моды при любой отличной от нуля величине коэффициента вязкости существует такое значение параметра Рэлея W_* , когда при $W < W_*$ поверхность капли может совершать периодические движения, то есть осциллировать, а при $W \geq W_*$ поверхность капли может двигаться только аperiodически (рис. 1). Причем W_* достаточно близко к критическому для реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду значению $W_{cr} = (n + 2)$, и разность $W_{cr} - W_*$ стремится к нулю при $\nu \rightarrow 0$. Когда параметр Рэлея лежит в диапазоне значений $W_* < W < W_{cr}$, то есть когда свободная поверхность кап-

ли совершает аperiodические, но устойчивые движения, вихревое движение будет проникать в глубь капли на значительное расстояние, и теория пограничного слоя в данной ситуации будет неприменима. Для маловязкой жидкости диапазон $W_* < W < W_{cr}$ весьма узок, а то обстоятельство, что в этом диапазоне вихревое движение заполняет весь объем капли, по всей видимости, связано с закономерностями реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости по отношению к избыточному заряду. Согласно [16] при приближении поверхностной плотности заряда к критической для реализации неустойчивости свободной поверхности жидкость под свободной поверхностью становится неустойчивой по отношению к возникновению в ней вихревых движений конвективного типа даже в отсутствие градиентов температуры.

Сравнение полученного решения с точным. В целях оценки точности расчетов в рамках теории пограничного слоя для расчета осцилляций заряженной капли вязкой жидкости проведем сравнение найденного решения (21) с точным решением системы (14).

На основе точного решения (14) в первом порядке малости по амплитуде начальной деформации равновесной сферической формы капли найдем выражение для ротора скорости, характеризующего степень завихренности поля скоростей:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{U}(r, \vartheta, t) &= \left(\sum_{n \in \Xi} \Omega_n(r, t) \cdot \partial_{\vartheta} P_n(\mu) \right) \vec{e}_{\varphi}; \\ \Omega_n(r, t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{h_n b_n(S_n^{(k)})}{n(n+1)} \frac{S_n^k}{\nu} \frac{j_n(\chi_n^{(k)} r)}{j_n(\chi_n^{(k)} r_0)} \exp(S_n^{(k)} t). \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь найдем выражение для ротора на основе приближенного решения (21), полученного в рамках теории пограничного слоя:

$$\begin{aligned} \Omega_n(r, t) &= \frac{(n-1) i h_n \omega_n^2}{n \varpi_n r_0} \left[\eta_n^{(-)} \left(\beta_n^{(-)} \frac{ch(\chi_n^{(-)} r)}{ch(\chi_n^{(-)} r_0)} + \frac{\chi_n^{(-)}}{\chi_n^{(-)} r} \frac{sh(\chi_n^{(-)} r)}{ch(\chi_n^{(-)} r_0)} \right) \exp(-i \varpi_n t) - \right. \\ &\quad \left. - \eta_n^{(+)} \left(\beta_n^{(+)} \frac{ch(\chi_n^{(+)} r)}{ch(\chi_n^{(+)} r_0)} + \frac{\chi_n^{(+)}}{\chi_n^{(+)} r} \frac{sh(\chi_n^{(+)} r)}{ch(\chi_n^{(+)} r_0)} \right) \exp(i \varpi_n t) \right] \exp(-\gamma_n t); \quad (24) \\ \chi_n^{(-)} &= 1 + \frac{n(n+1)}{(\chi_n^{(-)})^2 r^2}; \quad \chi_n^{(+)} = 1 + \frac{n(n+1)}{(\chi_n^{(+)})^2 r^2}; \\ \beta_n^{(-)} &= 1 - \frac{n(n+1)}{(\chi_n^{(-)})^2 r^2}; \quad \beta_n^{(+)} = 1 - \frac{n(n+1)}{(\chi_n^{(+)})^2 r^2}. \end{aligned}$$

Проанализируем зависимости от радиальной переменной r выражения для вихря скорости $\Omega_n(r, t)$ при фиксированном времени $t = \text{const}$, отталкиваясь от выражений (23) и (24), полученных в точной теории и в теории пограничного слоя, соответственно. Результаты расчета по (23) и (24) приведены на рис. 1, а-б и рис. 2, а-б. Детальные расчеты показывают, что теория пограничного слоя хорошо приближает точное решение, только начиная с некоторого времени t_0 , начиная с которого корни дисперсионного уравнения $D_n(S_n^{(k)}) = 0$ с номерами $n \geq 3$ становятся несущественными в выражении (23). В начальный же момент времени $t = 0$ модифицированная теория пограничного слоя дает большие отклонения от точной теории в широком диапазоне значений r , как это видно из рис. 3. Появление обсуждаемой особенности с математической точки зрения связано с тем, что в точной теории суммирование в выражении (23) производится по большому количеству корней дисперсионного уравнения $D_n(S_n^{(k)}) = 0$ до тех пор, пока ряд (23) не сойдется, а в приближенной теории пограничного слоя учитывается только один или два корня дисперсионного уравнения. С физической точки зрения данное обстоятельство связано с заданием в решаемой задаче нулевого начального ус-

ловия для поля скоростей: полноценное распределение поля скоростей течения жидкости, связанное с осцилляциями капли установится на интервале времени порядка периода осцилляций.

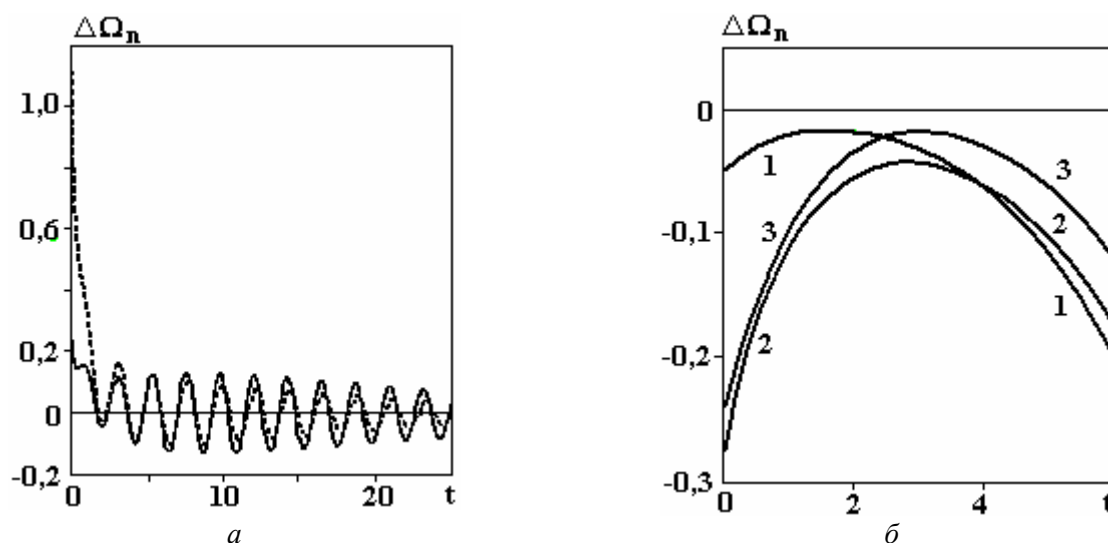


Рис. 2,а. Зависимости от времени t разности вихрей $\Delta\Omega_n$, определенных выражениями (23) и (24), при $n=2$, $\nu=0,02$, $W=0$, $r=1$ (сплошная кривая), $r=0,95$ (штриховая кривая)

Рис. 2,б. Зависимости от времени t разности вихрей $\Delta\Omega_n$, определенных выражениями (23) и (24), при $n=2$, $\nu=0,01$, $W=4,1$, $r=1$ (кривая 1), $r=0,9$ (кривая 2), $r=0,8$ (кривая 3)

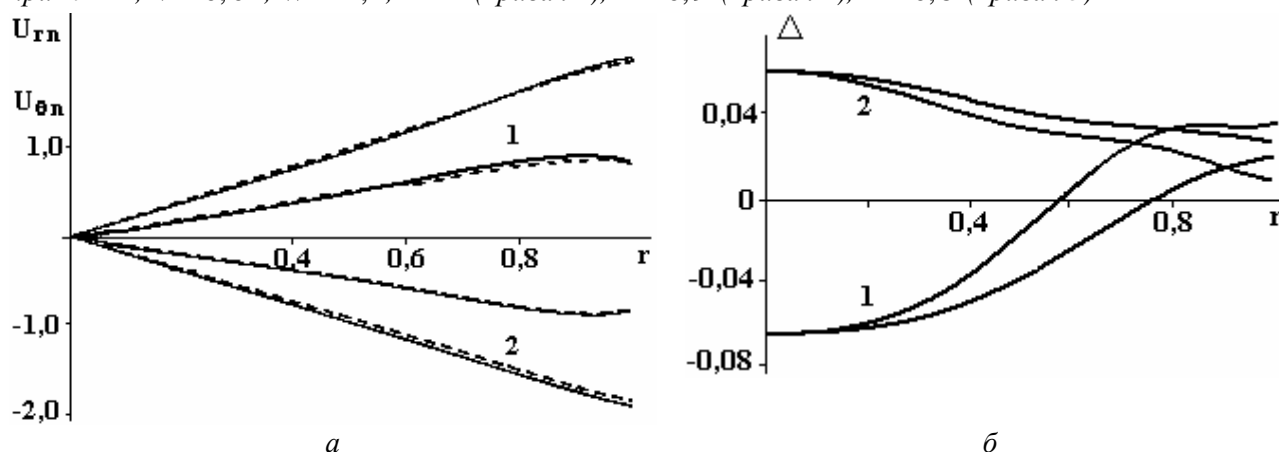


Рис.3. Зависимости от координаты r : а) проекций скоростей $U_{rn}^{(1)}$ – толстая кривая и $U_{\theta n}^{(1)}$ – тонкая кривая (сплошные кривые соответствуют точному решению, штрих – приближению теории пограничного слоя); б) относительного уклонения этих скоростей Δ от своего точного значения при $n=2$, $W=1$, $\nu=0,02$, $t=2$ (кривые 1), $t=3,2$ (кривые 2)

Из рис. 4 можно видеть, что величина времени t_0 , начиная с которого, теория пограничного слоя хорошо приближает точную теорию, является величиной много меньшей времени затухания движений на поверхности капли и в ее объеме.

Тот факт, что теория пограничного слоя описывает реальные движения жидкости в капле только, начиная с некоторого момента времени, указывает на то, что на ее основе нельзя описать зарождение пограничного слоя вблизи свободной поверхности капли. Для описания образования пограничного слоя вблизи свободной поверхности заряженной капли нужно использовать точное выражение (23) для вихря скорости. Принимая за толщину пограничного слоя δ расстояние от свободной поверхности капли на котором величина вихря, описываемого точным решением (23), уменьшается в $e \approx 2,718$ раз, нанесем зависимость $\delta = \delta(t)$ на рис. 5 пунктиром. На том же рисунке точечная кривая даст нам пограничный слой определенный в рамках модифицированной теории по соотношению (24). Анализ рис. 5 показывает, что толщина пограничного слоя вблизи свободной поверхности капли определенная по точному решению при малых временах возрастает, а затем остается практически

постоянной, примерно равной толщине пограничного слоя (24), определенной в модифицированной теории.

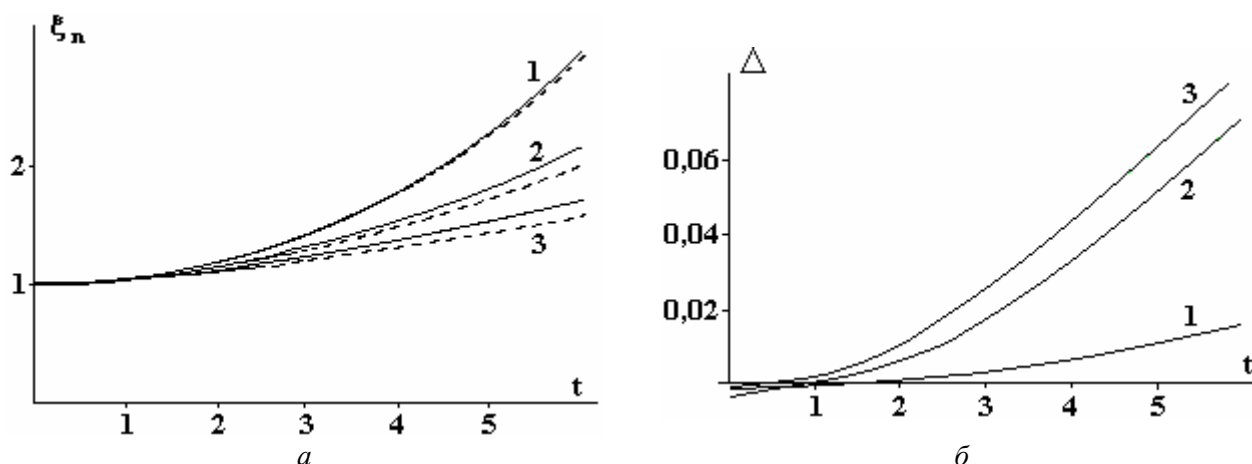


Рис. 4. Зависимость от времени t : а) коэффициента $\xi_n^{(1)}$, определяющего образующую формы капли (сплошная кривая соответствует точному значению, рассчитанному по (14), а пунктирная – приближению теории пограничного слоя, рассчитанному по (21)); б) абсолютной погрешности Δ при определении этого коэффициента в рамках теории пограничного слоя при $n = 2$, $W = 4,05$, $\nu = 0,01$ (кривая 1), $\nu = 0,05$ (кривая 2), $\nu = 0,1$ (кривая 3)

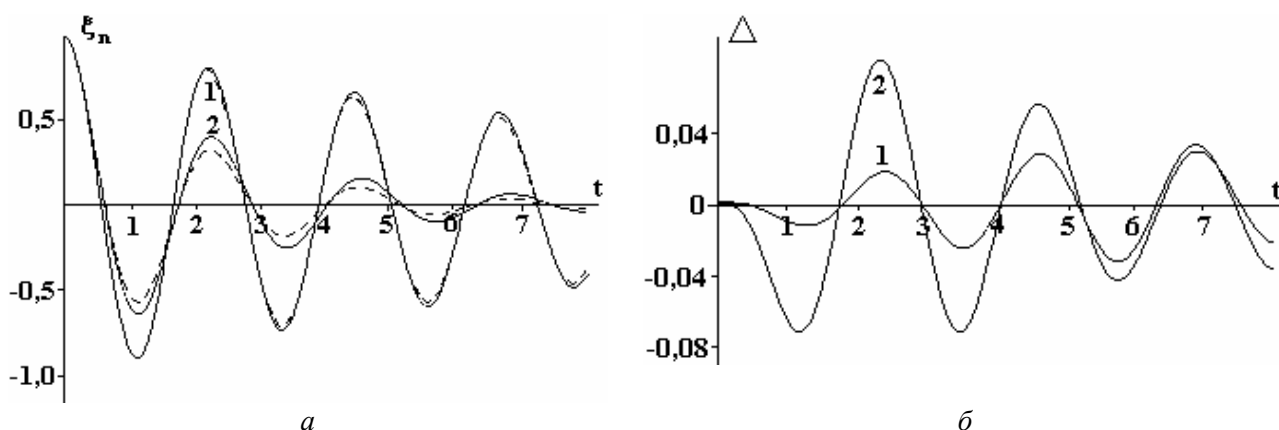


Рис. 5. Зависимость от времени t : а) коэффициента $\xi_n^{(1)}$, определяющего образующую формы капли (сплошная кривая соответствует точному значению, рассчитанному по (14)); штриховая – приближению теории пограничного слоя, рассчитанному по (21)); б) абсолютной погрешности Δ при определении этого коэффициента согласно теории пограничного слоя при $n = 2$, $W = 0$, $\nu = 0,02$ (кривая 1), $\nu = 0,1$ (кривая 2)

Из рис. 5 видно, что время формирования пограничного скоростного слоя у поверхности капли вязкой жидкости является небольшим по сравнению с характерными временами вязкого затухания колебаний поверхности капли и примерно равно периоду осцилляций в области устойчивости или величине, обратной инкременту неустойчивости при $W \geq W_{cr}$.

Таким образом, проведенный анализ точности теории пограничного слоя указывает на то, что при $t \geq t_0$ теория пограничного слоя весьма точно описывает реальное вихревое движение жидкости в капле. Если же вязкость жидкости является малой величиной, то вихревые компоненты, пропорциональные $U_m^{(c)}(r,t) \sim \nu$ и $U_{\vartheta n}^{(c)}(r,t) \sim \sqrt{\nu}$, оказываются малыми величинами в сравнении с крупномасштабным потенциальным движением жидкости в капле. Все это приводит к тому, что проекции скорости жидкости на орты сферической системы координат, определенные с учетом потенциальных и вихревых компонент при малой вязкости жидкости, в теории пограничного слоя и точной теории отличаются весьма незначительно, как это можно видеть из рис. 5.

Заключение. Более простая математическая модель задачи расчета осцилляций заряженной капли в рамках модели пограничного слоя приводит к результатам, отличающимся от точных на единицы процентов. Сказанное вселяет определенный оптимизм на использование теории пограничного слоя для расчета весьма громоздких задач нелинейных осцилляций заряженных капель во внешних силовых полях.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК-2209-2006-1, гранта РФФИ №06-01-00066-а и гранта губернатора Ярославской области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Курочкина С.А., Санасарян С.А. Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности вязкой электропроводной жидкости // Электронная обработка материалов. 2004. № 2. С. 27–31.
2. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Климов А.В., Ширяева С.О., Курочкина С.А. Об устойчивости волновых течений в тонких слоях жидкости с заряженной свободной поверхностью. Часть 2. Периодические волны конечной амплитуды в вязкой жидкости (Обзор) // Электронная обработка материалов. 2004. № 4. С. 66–78.
3. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Жаров А.Н., Коромыслов В.А. Нелинейные осцилляции заряженных капель. Часть I. Аналитические и численные исследования общих закономерностей нелинейных осцилляций. Экспериментальные работы. (Обзор) // Электронная обработка материалов. 2005. № 3. С. 25–36.
4. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Жаров А.Н., Коромыслов В.А. Нелинейные осцилляции заряженных капель. Часть II. Внутреннее резонансное взаимодействие и измерение. Влияние внешних полей. Учет вязкости. (Обзор) // Электронная обработка материалов. 2005. № 4. С. 24–35.
5. Климов А.В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Санасарян С.А. Нелинейные капиллярно-гравитационные волны на поверхности слоя вязкой жидкости // Электронная обработка материалов. 2005. № 5. С. 24–34.
6. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Жаров А.Н. Нелинейные осцилляции заряженной капли. Ярославль: изд. ЯрГУ, 2006. 280 с.
7. Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О., Григорьев А.И. Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости. Ярославль: изд. ЯрГУ, 2006. 288 с.
8. Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О. Нелинейные осцилляции заряженной капли вязкой жидкости // Электронная обработка материалов. 2005. № 4. С. 35–44.
9. Longuet-Higgins M.S. Mass transport in water waves // Royal. Soc. London. Trans. Ser. A. 1953. V. 245. № 903. P. 535–581.
10. Жаров А.Н., Григорьев А.И. О временной эволюции формы поверхности, деформированной в начальный момент заряженной капли вязкой жидкости // ЖТФ. 2005. Т.75. Вып.1. С. 22–31.
11. Справочник по специальным функциям/ Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
12. Григорьев А.И., Лазарянц А.Э. Об одном методе решения уравнения Навье-Стокса в криволинейных координатах // ЖВММФ. 1992. Т. 32. № 6. С. 929–938.
13. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
15. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Муничев М.И. Волновые и вихревые движения жидкости в сильно заряженной капле // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 7. С. 1–8.
16. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. Конвективные движения в слое вязкой жидкости с однородно заряженной свободной поверхностью // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 9. С. 41–45.

Поступила 06.03.07

Summary

The boundary layer theory connected with periodically moved free surface of viscous liquids is applied to derivation of a problem of a charged drop of a viscous liquids linear oscillations calculation. The approximated derivation is compared with exact one.