

О роли вязкости жидкости в реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца

С. О. Ширяева, А. И. Григорьев, С. А. Суханов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, e-mail: grig@uniyar.ac.ru

Анализируется идеализированная модель двух несмешивающихся жидкостей, нижняя из которых вязкая, а верхняя, движущаяся с постоянной скоростью параллельно границе раздела, идеальная. Показано, что в линейном приближении роль вязкости жидкости сводится к появлению у волн на границе раздела декремента затухания.

Ключевые слова: несмешивающиеся жидкости, тангенциальный скачок поля скоростей, поверхность раздела, электрический заряд, неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, вязкость, декремент затухания.

УДК 532.517.013.4:537.2

ВВЕДЕНИЕ

Неустойчивость тангенциального разрыва поля скоростей течения несжимаемой жидкости (неустойчивость Кельвина-Гельмгольца) имеет важное значение в большом количестве технических и технологических приложений [1–3]. Она определена лишь для модели идеальных жидкостей, тем не менее представляет интерес вопрос о том, какую роль в её реализации может играть наличие у одной из жидкостей вязкости (когда у обеих жидкостей имеется вязкость, можно говорить уже о неустойчивости Майлза) [4]. Сама неустойчивость Кельвина-Гельмгольца в последние годы неоднократно становилась предметом исследования в различных геометриях: плоской [5–6], сферической [7], цилиндрической [8–9].

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеются две несмешиваемые несжимаемые жидкости, верхняя из которых заполняет полубесконечное пространство $z > 0$ – диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ , плотностью ρ_1 , а нижняя, вязкая, – идеальный проводник с кинематической вязкостью ν и плотностью ρ_2 (по определению $\rho_2 > \rho_1$) – заполняет в поле сил тяжести \vec{g} полубесконечное пространство $z \leq 0$. Вектор ускорения свободного падения \vec{g} направлен противоположно \vec{e}_z – орту декартовой системы координат, координатная плоскость $z = 0$ которой совпадает с невозмущенной границей раздела жидкостей. Верхняя среда движется параллельно границе раздела с постоянной скоростью \vec{V} вдоль орта \vec{e}_x . Будем исследовать волновое движение на границе раздела.

Математическая формулировка задачи имеет вид [10]:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{U}_1}{dt} &= -\nabla \left(\frac{P_1}{\rho_1} \right) + \vec{g}; \\ \frac{\partial \vec{U}_2}{\partial t} &= -\nabla \left(\frac{P_2}{\rho_2} \right) + \nu \Delta \vec{U}_2 + \vec{g}; \\ \Delta \Phi_j &= 0; \quad \vec{E}_j = -\nabla \Phi_j; \\ \operatorname{div} \vec{U}_j &= 0, \quad (j = 1; 2); \\ z = \xi: \quad (\vec{n}, \vec{U}_1) &= (\vec{n}, \vec{U}_2); \\ (\vec{\tau}, (\vec{n}, \nabla) U_2) + (\vec{n}, (\vec{\tau}, \nabla) U) &= 0; \\ P_2 - P_1 + 2\nu\rho_2 \frac{\partial U_{2z}}{\partial z} &= P_E + P_\sigma; \\ \Phi &= \text{const}; \\ z \rightarrow \infty: \vec{U}_1 &\rightarrow \vec{V}; \quad z \rightarrow -\infty: \\ \vec{U}_2 &\rightarrow 0; \quad |\nabla \Phi_0| \rightarrow \vec{E} = E \cdot \vec{e}_z, \end{aligned} \quad (1)$$

где \vec{U}_j – поля скоростей в верхней и нижней жидкостях; \vec{n} и $\vec{\tau}$ – единичные векторы нормали и касательной к возмущенной границе раздела сред;

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{e}_x \left(1 - \frac{1}{2} (\partial_x \xi_1)^2 \right) + \vec{e}_z \partial_x \xi_1; \\ \vec{n} &= \vec{e}_z \left(1 - \frac{1}{2} (\partial_x \xi_1)^2 \right) - \vec{e}_x \partial_x \xi_1, \end{aligned}$$

$\xi(x, t)$ – возмущение границы раздела сред, амплитуда которой принимается в качестве малого параметра задачи; P_1, P_2 – гидродинамические давления в верхней и нижней жидкостях; P_σ и P_E – капиллярное и электростатическое давления

на границе раздела сред; \vec{E} – напряженность электростатического поля в верхней жидкости (внешней для жидкости).

Проведем разделение полей скоростей $\vec{U}_1(x, z, t)$, $\vec{U}_2(x, z, t)$ на потенциальную и вихревую части на основе теоремы Гельмгольца [11]. Для этого введем скалярные потенциалы поля скоростей $\varphi_2(\vec{r}, t)$ и скалярные функции тока $\psi_2(\vec{r}, t)$ для нижней вязкой жидкости и потенциал поля скорости $\varphi_1(\vec{r}, t)$ для верхней жидкости, считаемой идеальной.

Поскольку движения жидкостей вызваны малыми колебаниями их граничной поверхности, примем, что в безразмерных переменных $\rho_2 = g = k = 1$ потенциалы $\varphi_j(\vec{r}, t)$ и $\psi_2(\vec{r}, t)$ имеют тот же порядок малости, что и амплитуды волн: $|\varphi_j| \sim |\psi_2| \sim |\xi_j| \sim \varepsilon$.

Для определения капиллярного давления на границу раздела удобно воспользоваться известным выражением

$$P_\sigma = \sigma \operatorname{div} \vec{n},$$

где вектор нормали определяется через уравнение поверхности:

$$F(x, z, t) \equiv z - \xi(x, t) = 0;$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla F(x, y, z)}{|\nabla F(x, y, z)|} \Big|_{F(x, y, z)=0}.$$

Для определения электростатического давления на границу раздела проводника и диэлектрика воспользуемся соотношением

$$z = \xi;$$

$$P_E = \frac{\varepsilon}{8\pi} (\nabla \Phi)^2.$$

Выражения для давлений в верхней и нижней жидкостях можно записать в виде

$$P_1(\vec{r}, t) = -\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \rho_1 g \xi - \frac{\rho_1}{2} \left[(\nabla \varphi_1)^2 - V^2 \right];$$

$$P_2(\vec{r}, t) = -\rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \rho_2 g \xi.$$

Решение задачи получим следующее:

$$\xi(x, t) = C \exp(ikx - ist);$$

$$\varphi_1(\vec{r}, t) = Vx + A \exp(-kz) \exp(ikx - ist);$$

$$U_{2x}(\vec{r}, t) = [ikB \exp(kz) - qC \exp(qz)] \exp(ikx - ist);$$

$$U_{2z}(\vec{r}, t) = [kB \exp(kz) + iqC \exp(qz)] \exp(ikx - ist);$$

где s – комплексная частота; k – волновое число; A, B, C – постоянные коэффициенты.

Решение определяем стандартными методами [11–12] в безразмерных переменных. В итоге получим дисперсионное уравнение [10]:

$$(1 + \rho) s^2 + (i4k^2 v - 2\rho kV) \times$$

$$\times s - 4k^4 v^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{is}{k^2 v}} \right) = \omega_0^2;$$

$$\omega_0^2 \equiv k \left[g(1 - \rho) + \rho^{-1} \sigma k^2 - k(\rho V^2 + 4\pi \varepsilon^{-1} \rho^{-1} k^2) \right];$$

$$\rho \equiv \rho_1 / \rho_2.$$

В приближении малой вязкости ($k^2 v \ll 1$, что имеет место при $k < \frac{1}{\sqrt{v}}$) дисперсионное

уравнение упростится:

$$(1 + \rho) s^2 + (i4k^2 v - 2\rho kV) s - \omega_0^2 = 0.$$

Подставим сюда $s \equiv -\omega - i\beta$. При этом могут реализоваться два сценария в зависимости от значений волновых чисел. В первом ω считается вещественным, а во втором ω – комплексным: $\omega \equiv \omega_v + i\gamma$. Принимается, что выражение под радикалом отрицательно, и в результате вместо частот появляются инкременты – декременты в зависимости от знака радикала.

В первом случае ($\omega_0^2 > 0$), в области устойчивого волнового движения, получим

$$(1 + \rho)(-\omega - i\beta)^2 + (i4k^2 v - 2\rho kV)$$

$$(-\omega - i\beta) - \omega_0^2 = 0$$

или

$$(\omega^2 + 2i\omega\beta - \beta^2)(1 + \rho) +$$

$$+ (-i4k^2 v \omega + 2\rho kV \omega - 4k^2 v \beta + 2i\rho kV \beta) - \omega_0^2 = 0.$$

Приравняем нулю отдельно мнимую и действительную части этого уравнения:

$$(\omega^2 - \beta^2)(1 + \rho) - (2\rho kV \omega + 4k^2 v \beta) - \omega_0^2 = 0; \quad (12)$$

$$(1 + \rho)\omega\beta - 2k^2 v \omega + \rho kV \beta = 0.$$

Из второго уравнения видно, что

$$\beta = \frac{2vk^2 \omega}{(1 + \rho)\omega + \rho kV}. \quad (13)$$

Из первого с точностью до v^2 получим

$$\omega^2(1 + \rho) - 2\rho kV \omega - \omega_0^2 = 0$$

с решениями:

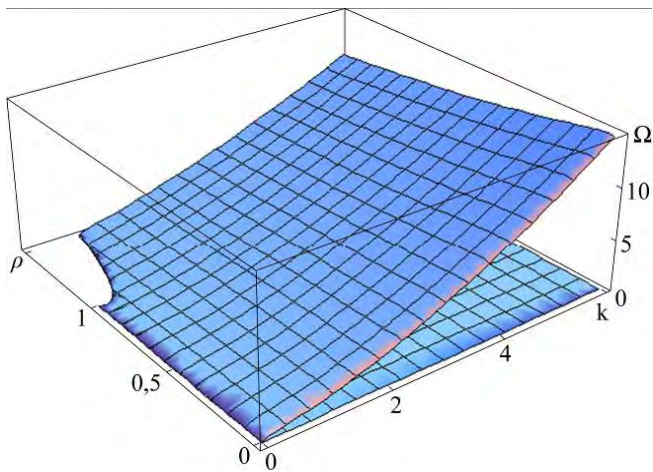


Рис. 1а. Зависимость частоты волн (верхняя поверхность) от безразмерного волнового числа k и отношения плотностей ρ , рассчитанная при $\nu = 0,002$; $W = 0$; $We = 0$, то есть для чистой неустойчивости Релея-Тейлора. Нижняя поверхность соответствует декременту затухания волн, рассчитанному при тех же значениях физических параметров.

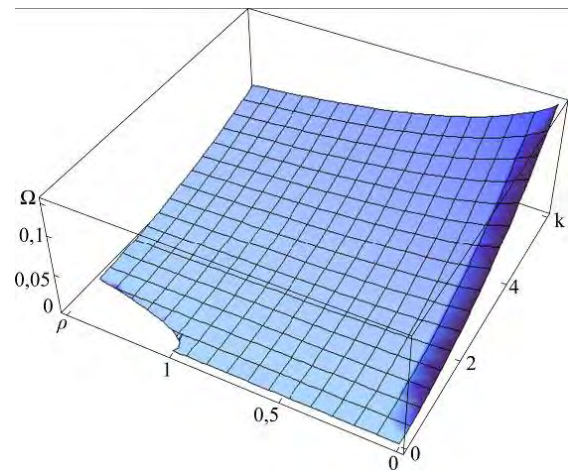


Рис. 1б. Декремент затухания тот же, что на рис. 1а, но в более крупном масштабе.

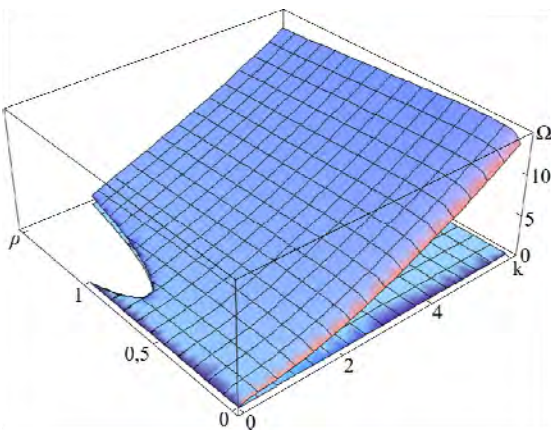


Рис. 2а. То же, что на рис. 1, но при $\rho \leq 1$ для чистой неустойчивости Тонкса-Френкеля. При $\rho > 1$ речь идёт о неустойчивости Релея-Тейлора на заряженной границе раздела сред. Рассчитано при $W = 1$; $We = 0$.

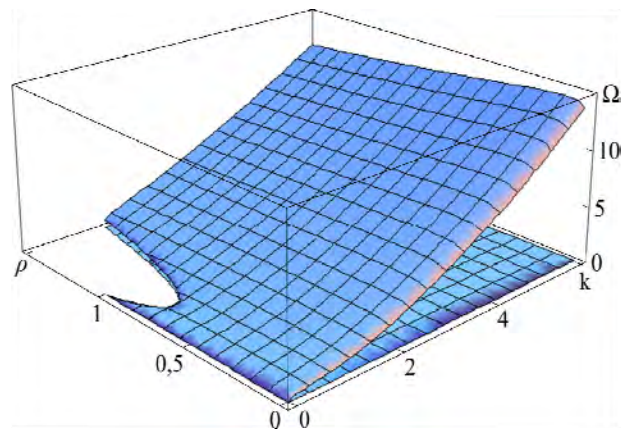


Рис. 2б. То же, что на рис. 1, но при $\rho \leq 1$ для чистой неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. При $\rho > 1$ речь идёт о неустойчивости Релея-Тейлора при осложняющем тангенциальном движении верхней среды. Рассчитано при $W = 0$; $We = 1$.

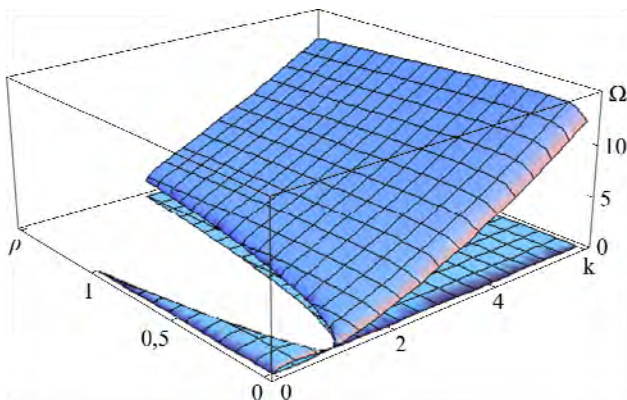


Рис. 2в. То же, что на рис. 1, но при $\rho \leq 1$ для тангенциального разрыва поля скоростей (для неустойчивости Кельвина-Гельмгольца) на однородно заряженной границе раздела. При $\rho > 1$ речь идёт о неустойчивости Релея-Тейлора при осложняющем тангенциальном движении верхней среды с однородно заряженной границей раздела сред. Рассчитано при $W = 1$; $We = 1$.

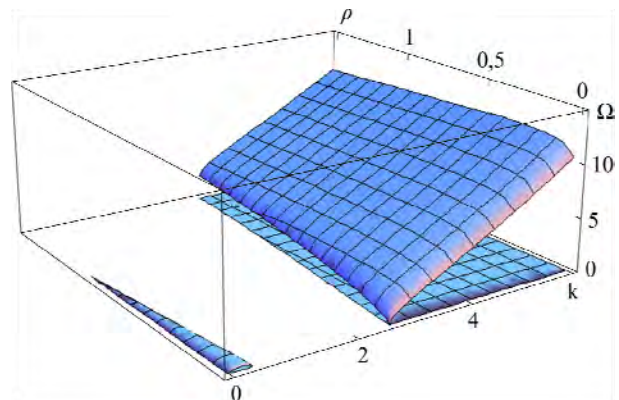


Рис. 2г. То же, что на рис. 2в, но рассчитано при $W = 1$; $We = 2$.

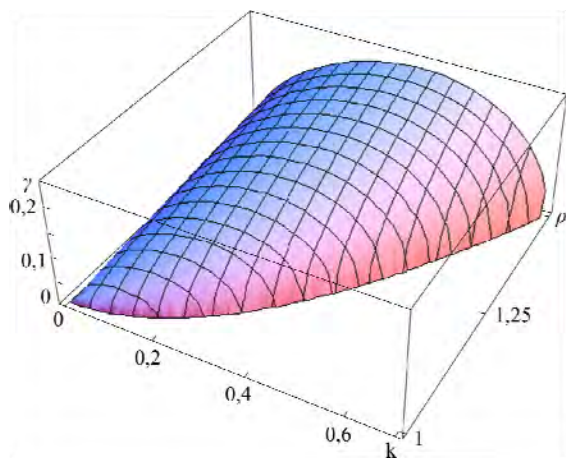


Рис. 3а. Зависимость инкремента неустойчивости Релея-Тейлора от безразмерного волнового числа k и отношения плотностей ρ . Рассчитано при $W = 0$; $We = 0$.

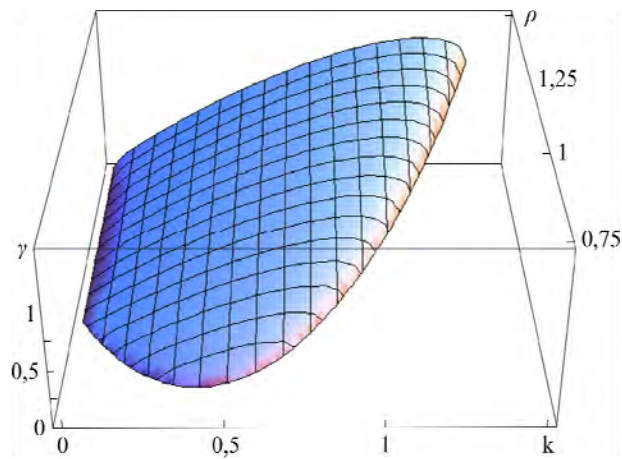


Рис. 3б. Инкременты неустойчивости Релея-Тейлора при $\rho > 1$ на заряженной границе раздела сред и Тонкса-Френкеля при $\rho \leq 1$. Рассчитано при $W = 1$; $We = 0$. Зависимость от безразмерного волнового числа k и отношения плотностей ρ .

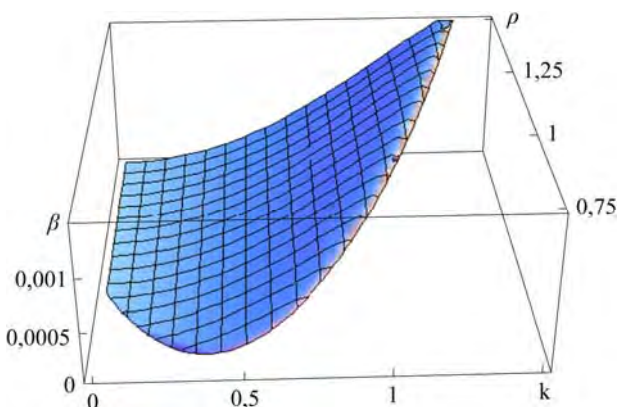


Рис. 3в. Декремент затухания неустойчивости Релея-Тейлора при $\rho > 1$ и осложняющем влиянии электрического поля и декремент затухания неустойчивости Тонкса-Френкеля при $\rho \leq 1$. Зависимость от безразмерного волнового числа k и отношения плотностей ρ . Рассчитано при $W = 1$; $We = 0$.

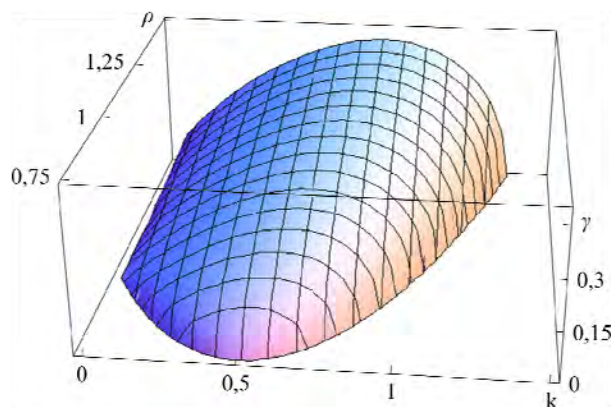


Рис. 3г. Инкременты неустойчивости Релея-Тейлора при $\rho > 1$ и осложняющем влиянии тангенциального движения верхней среды и Кельвина-Гельмгольца при $\rho \leq 1$. Зависимость от безразмерного волнового числа k и отношения плотностей ρ . Рассчитано при $W = 0$; $We = 1$.

$$\omega_{1,2} = \frac{\rho V k}{(1+\rho)} \pm \sqrt{\frac{\rho^2 V^2 k^2 + \omega_0^2 (1+\rho)}{(1+\rho)^2}}. \quad (14)$$

На рис. 1а приведены поверхности, построенные по (13) и (14) в безразмерных переменных $\rho_2 = g = \sigma = 1$ для ситуации, когда безразмерный коэффициент вязкости $\nu = 0,002$, а безразмерные параметры нулевые: $W = 0$; $We = 0$ (для границы раздела воды и воздуха, который моделируется невязкой диэлектрической жидкостью). Нижняя поверхность на рис. 1а представляет собой плоскость, в более крупном (в сто раз) масштабе она приведена на рис. 1б. Видно, что декременты затухания значительно меньше частот. Расчёты показывают, что такое положение сохраняется и при $W \neq 0$; $We \neq 0$ (см. рис. 2). Декременты сохраняют порядок величины в анализируемом диапазоне волновых чисел и при увеличении безразмерных параметров до $W = 1$, $We = 2$ (при больших значениях

параметров анализ не проводился). Область неустойчивости в левом верхнем углу (там, где не существуют частоты и декременты) возникает при плотности верхней среды, большей плотности жидкости и обязана своим существованием неустойчивости Релея-Тейлора. При $\rho < 1$ неустойчивость происходит из-за давления электростатического поля или из-за наличия тангенциального скачка поля скоростей. Из рис. 2 видно, что с увеличением параметров W и We область неустойчивости растёт.

Приведенные рисунки и сказанное относится к ветви частоты (14) со знаком «+» перед радикалом. Для знака «-» соответствующая ветвь (поверхность) идёт вниз, в область отрицательных значений, и пересекается с декрементом затухания. Таким образом, частота становится равной декременту, и о волновом движении не приходится говорить, ибо оно затухает слишком быстро. Потому соответствующие ветви не приводятся.

Во втором случае, при больших значениях напряженности поля в определенной области по k , где реализуется электрогидродинамическая или аэродинамическая неустойчивость или обе сразу, или реализуется неустойчивость Релея-Тейлора, выражение для квадрата частоты меняет знак на противоположный, и квадрат частоты становится отрицательным. В (12) вместо чисто вещественной частоты ω следует подставить комплексную $\omega \equiv \pm i\gamma + \omega_V$, где $\omega_V \equiv \frac{\rho V k}{(1+\rho)}$, а $\pm i\gamma \equiv \pm \sqrt{\frac{\rho^2 V^2 k^2 + \omega_0^2 (1+\rho)}{(1+\rho)^2}}$. Вместо ω_0^2 следует подставить $-\omega_0^2$. Тогда, пренебрегая слагаемыми $\sim v^2$, получим

$$\begin{aligned} & \left[\omega_V^2 - (\beta \pm \gamma)^2 \right] (1+\rho) + \\ & + \left[2\rho k V \omega_V + 4k^2 v (\beta \pm \gamma) \right] + \omega_0^2 = 0; \\ & (1+\rho) \omega_V (\beta \pm \gamma) - 2k^2 v \omega_V + \rho k V (\beta \pm \gamma) = 0. \end{aligned}$$

В этих выражениях γ – инкремент неустойчивости. Наличие малого декремента затухания снизит величину инкремента.

Из второго уравнения видно, что

$$\begin{aligned} \beta \pm \gamma &= \frac{2vk^2 \omega_V}{(1+\rho) \omega_V + \rho k V} \equiv \frac{2vk^2 \frac{\rho V k}{(1+\rho)}}{\frac{\rho V k (1+\rho)}{(1+\rho)} + \rho k V} \equiv \frac{vk^2}{(1+\rho)}. \\ \beta &= \frac{vk^2}{(1+\rho)} \mp \gamma. \end{aligned} \quad (15)$$

Соответствующие графики безразмерных инкрементов приведены на рис. 3. Из рис. 3а видно, в частности, что величина инкремента порядка десятых долей растет с увеличением отношения плотностей ρ . Декремент затухания соответствующих движений жидкости весьма мал (0,001) и зависит от кинематической вязкости жидкости в соответствии с (15). С появлением электрического поля величина инкремента растет, как это видно из рис. 3б, но принципиально картина не меняется. На рис. 3в приведен декремент затухания для неустойчивости Релея-Тейлора при осложняющем влиянии электрического поля (рассчитан при $W = 1$; $We = 0$). Видно из сравнения с рис. 3б, что величина декремента при прочих равных условиях примерно на два порядка меньше инкремента. На рис. 3г приведен инкремент неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Из рис. 3 видно, что для всех неустойчивостей величина инкрементов растет с увеличением отношения плотностей ρ .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, при решении модельной задачи для системы из движущейся с постоянной скоростью легкой идеальной жидкости и неподвижной тяжелой маловязкой выяснилось, что в первом приближении наличие малой вязкости проявляется лишь с появлением слабого затухания волн с декрементом, по-разному зависящему от волнового числа k и коэффициента кинематической вязкости в области устойчивого и неустойчивого волнового движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов Е.А., Лушников П.М. Нелинейная теория возбуждения волн ветром за счет неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. *ЖЭТФ*. 1995, 108(2), 614–630.
2. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Морозов В.В. О роли неустойчивости поверхности жидкости по отношению к собственному заряду в формировании электрического тока при электролитном нагреве. *ЭОМ*. 2003, (3), 15–20.
3. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Морозов В.В. О некоторых закономерностях формирования электрического тока в окрестности опущенного в электролит электрода. *ЭОМ*. 2004, (5), 16–20.
4. Ле Блон П., Майсек Л. *Волны в океане*. Т.2. М.: Мир, 1981. 366 с.
5. Ширяева С.О., Суханов С.А. Нелинейный расчет течений, порождаемых волной на заряженной границе раздела несмешивающихся жидкостей при наличии тангенциального скачка поля скоростей. *Исследовано в России*. 045. С.522–531. 2009. <http://zhurnal.apc.relearn.ru/articles/2009/045.pdf>.
6. Григорьев А.И., Суханов С.А., Ширяева С.О. Об устойчивости волнового движения на заряженной границе раздела несмешивающихся жидкостей при наличии тангенциального скачка поля скоростей. *Изв. РАН. МЖГ*. 2012, (4), 99–109.
7. Коромыслов В.А., Григорьев А.И., Ширяева С.О. Нелинейные осцилляции капли, движущейся с постоянной скоростью относительно диэлектрической среды в электростатическом поле. *ЖТФ*. 2006, 76(5), 16–24.
8. Григорьев А.И., Петрушов Н.А., Ширяева С.О. Нелинейный анализ закономерностей реализации волнового движения на поверхности заряженной струи, движущейся относительно материальной среды. *Изв. РАН. МЖГ*. 2012, (1), 81–92.
9. Григорьев А.И., Петрушов Н.А., Ширяева С.О., Полянцева Н.А. Нелинейный анализ волнового движения на поверхности струи в продольном электрическом поле, движущейся в диэлектрической среде. *ЖТФ*. 2012, 82(8), 35–41.
10. Григорьев О.А., Ширяева С.О. Неустойчивость заряженной плоской поверхности тангенциального

разрыва двух несмешивающихся жидкостей различных плотностей. *ЖТФ*. 1996, (2), 23–34.

11. Левич В.Г. *Физико-химическая гидродинамика*. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 538 с.
12. Ширяева С.О., Григорьев А.И. *Скаляризация векторных краевых задач гидродинамики*. Ярославль: Изд. ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2010. 180 с.

Поступила 07.06.12

Summary

An analysis is made of an ideal model of two immiscible liquids the lower of which is viscous and the upper

one, moving with a constant velocity parallel to the interface is ideal. It is shown that in the linear approximation the role of viscosity of the two liquids reduces to the appearance of the decrement of damping of waves on the interface.

Keywords: immiscible liquids, tangential jump of a velocity field, interface of two liquids, electric charge, Kelvin-Helmholtz instability, viscosity, decrement of damping.